MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY †
G. HERGLOTZ H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

51. BAND 6. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 4. APRIL 1949)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1949

Math.
Z.

Über einige affingeometrische Ovalsätze in der direkten Infinitesimalgeometrie.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

Einleitung.

0.1. Die hier in Rede stehenden Ovalsätze, welche dem Fragenkreis des BÖHMERschen Satzes entstammen, sind an anderer Stelle[1]) — kurz gesagt — auf ihren topologischen Kern hin untersucht worden. Demgemäß wurde dort sowohl in der Formulierung der Sätze als in den Beweisen die Bezugnahme auf Begriffsbildungen infinitesimalen Charakters, wie etwa auf Paratingenten[2]), vermieden; anders ausgedrückt: Die Gültigkeit der von uns aufgestellten Sätze war nur an Voraussetzungen „im Kleinen", d. h. bezüglich gewisser Umgebungen des jeweils betrachteten Punktes geknüpft, nicht an Voraussetzungen „im Unendlich-Kleinen", d. h. im betrachteten Punkte selbst[2a]).

0.2. Die hier vorliegende Note bringt nun ergänzend infinitesimale Betrachtungen und zwar im Sinne der direkten Infinitesimalgeometrie[3]). Dabei handelt es sich im wesentlichen um Aufstellung von Bedingungen, welche sich auf gewisse Paratingenten des Grundbogens beziehen und deren Erfülltsein *hinreicht*, um die Gültigkeit der oben erwähnten Voraussetzungen „im Kleinen" sicherzustellen. Da Bedingungen infinitesimaler Natur („im Unendlich-Kleinen") auf das Verhalten im

[1]) HAUPT, Über Verallgemeinerungen des BÖHMERschen und verwandter Ovalsätze, Abh. a. d. math. Seminar d. Hansischen Univ. 15 (1943), 130—164.

[2]) D. h., allgemein zu reden: Limiten von Folgen solcher Mengen, welche bezüglich einer auf den Punkt P sich zusammenziehenden Umgebungsfolge je eine bestimmte Eigenschaft besitzen (vgl. Nr. 2.2.).

[2a]) Vgl. die Ausführungen über Eigenschaften im Kleinen bzw. im Unendlich-Kleinen (Eigenschaften „lokaler" bzw. „punktaler" Natur) in HAUPT-AUMANN-PAUC, Differential- und Integralrechnung, 1. Bd., 2. Aufl. (Berlin 1948), Anhang (am Ende des Bandes).

[3]) *Direkte Infinitesimalgeometrie* in dem von uns gemeinten Sinne bezeichnet — kurz gesagt — denjenigen Standpunkt, bei welchem Differenzierbarkeitsbedingungen nur in Gestalt *geometrischer* Forderungen auftreten und auch nicht durch die Rücksicht auf rechnerische Behandlung der jeweiligen Probleme bestimmt sind. Demgegenüber bezeichnen wir als (klassische) *Differentialgeometrie* denjenigen Standpunkt, bei welchem man sich methodisch wesentlich auf die Differential*rechnung* stützt. Vgl. dazu auch die Bemerkungen betr. direkte Infinitesimalgeometrie von G. ALEXITS, in Zentralblatt für Math. 27 (1943), 136—137.

einzelnen Punkte sich beziehen, sind sie im allgemeinen einfacher zu formulieren, als Bedingungen „im Kleinen"; damit hängt zusammen, daß infinitesimale Bedingungen für die Zwecke der Rechnung im allgemeinen bequemer sind[4]).

0. 3. Im einzelnen gliedert sich die vorliegende Note wie folgt: Nach einer kurzen Zusammenstellung (§ 1) einiger, für das Folgende wesentlicher, Tatsachen aus der früheren Arbeit, werden (§ 2) die hier benötigten Paratingenten (Schmieggebilde) eingeführt und besprochen und sodann (§§ 3, 4) die erwähnten hinreichenden Infinitesimalbedingungen gewonnen.

0. 4. Mit diesen (in Nr. 0. 3. angedeuteten) Betrachtungen nähert man sich schrittweise dem Standpunkt der (klassischen) Differentialgeometrie[3]) und damit der ursprünglichen (spezielleren) Fassung[5]) der in Rede stehenden Ovalsätze. Für jeden von diesen Sätzen ergibt sich übrigens aus unseren Betrachtungen, sogar unter Beibehaltung der Kegelschnitte als Ordnungs-Charakteristiken, eine Verallgemeinerung gegenüber der ursprünglichen Fassung im folgenden Sinne: Die Ovalsätze bleiben richtig, wenn das in ihrer ursprünglichen Fassung auftretende System der Ellipsen bzw. Parabeln bzw. Hyperbeln ersetzt wird durch das System derjenigen Kegelschnitte, deren numerische Exzentrizität kleiner bzw. gleich bzw. größer ist als eine beliebig vorgegebene reelle Zahl $f \geqq 1$.

§ 1.

Vorbereitende Bemerkungen.

Zwecks Einführung in die uns hier beschäftigende Fragestellung seien aus den früheren Darlegungen die zunächst wichtigen Punkte hervorgehoben.

1. 1. Den in Nr. 0. 1. erwähnten Sätzen liegt im wesentlichen folgender Sachverhalt zu Grunde[6]): Es sei $\mathfrak{g}$ ein in der euklidischen Ebene E_2 gelegenes, beschränktes, von einer einfachen geschlossenen Kurve $\mathfrak{R}$ begrenztes Gebiet (sog. Grundgebiet), gelegentlich auch ein topologisches Bild des offenen Kerns von $\bar{\mathfrak{g}}$, etwa E_2 selbst[7]). In $\mathfrak{g}$ sei

[4]) Entsprechend der größeren Einfachheit der Differentialrechnung gegenüber der Differenzenrechnung.

[5]) Vgl. vor allem P. Böhmer, Über elliptisch-konvexe Ovale, Math. Ann. 60 (1905), 256 ff.; H. Mohrmann, Beständig gleichartig gekrümmte Kurven, Math. Ann. 72 (1912), 285 ff., und Über beständig hyperbolisch gekrümmte Kurvenstücke, ebenda 593 ff. — Vgl. ferner W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II: Affine Differentialgeometrie, bearb. von K. Reidemeister, Berlin 1923, insbes. § 21.

[6]) Vgl. a. a. O. [1]), § 1.

[7]) Im letzteren Falle entspricht der Begrenzung $\mathfrak{R}$ das System der uneigentlichen Punkte aller Halbgeraden durch einen festen Punkt 0, wobei verschiedenen Halbgeraden mit gleichem Träger verschiedene uneigentliche Punkte entsprechen.

ein einfacher Bogen (evtl. Kurve) $\mathfrak{B}$ fest vorgegeben (sog. Grundbogen). Schließlich sei in $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{R}$ ein System $\mathfrak{a}$ von *„Ordnungs-Charakteristiken"* $\mathfrak{A}$ ausgezeichnet; das sind in $\bar{\mathfrak{g}}$ abgeschlossene Bogen oder Kurven[8]), welche insbesondere eindeutig bestimmt werden entweder durch k Punkte von $\mathfrak{B}$ oder durch $(k-2)$-Punkte von $\mathfrak{B}$ und zwei (evtl. „zusammenfallende"[9])) Punkte von $\mathfrak{R}$. Auf weitere Eigenschaften der $\mathfrak{A}$ kommt es zunächst nicht an. Als Beispiele spezieller Art seien angeführt: $\mathfrak{g}$ ist gleich E_2 und $\mathfrak{a}$ ist das System entweder

1. 1. 1. aller Geraden ($k = 2$); oder

1. 1. 2. aller Kreise ($k = 3$), evtl. einschließlich der Geraden; oder

1. 1. 3. aller Kegelschnitte ($k = 5$).

1. 2. Es seien $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}$ (vgl. Nr. 1. 1.) gegeben. Ferner sei P ein Punkt von $\mathfrak{B}$ und es seien $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ (zweidimensionale) Umgebungen von P derart[10]), daß $\mathfrak{U}\mathfrak{B}, \mathfrak{V}\mathfrak{B}, \mathfrak{W}\mathfrak{B}$ je ein einfacher Bogen, also eine Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ ist. Bei den in Nr. 0. 1. erwähnten Sätzen spielen dann (unter anderem) folgende Beziehungen (Eigenschaften) zwischen einer Ordnungs-Charakteristik $\mathfrak{A}$ und dem Grundbogen $\mathfrak{B}$ eine Rolle:

1. 2. 1. Es enthält $\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{B}$ mindestens k Punkte; wir schreiben dafür kürzer: $M(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}) = 1$.

1. 2. 2. a. Es enthält $\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{B}$ mindestens $(k-1)$-Punkte und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{R}$ genau einen Punkt; wir schreiben dafür kurz: $M_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}) = 1$. (Im Beispiel der Nr. 1. 1. 3. entsprechen solche $\mathfrak{A}$ den Parabeln durch (mindestens) vier Punkte des Grundbogens.)

1. 2. 2. b. Es enthält $\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{B}$ mindestens $(k-1)$-Punkte und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{R}$ genau zwei verschiedene, im allgemeinen von den $(k-1)$ ersten Punkten abhängige Punkte; wir schreiben dafür auch kurz: $M_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}) = 1$, wobei $f \geqq 1$ diejenige reelle Zahl bezeichnet, welche $\mathfrak{A}$ definitionsgemäß[11]) zugeordnet ist. (Im Beispiel der Nr. 1. 1. 3. entsprechen solche $\mathfrak{A}$ den Hyperbeln durch (mindestens) vier Grundbogenpunkte und f entspricht der numerischen Exzentrizität der betrachteten Hyperbel.) Für $f = 1$ kommen wir zu Nr. 1. 2. 2. a. zurück.

1. 2. 3. Es (enthält $\mathfrak{A}\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{B}$ mindestens drei Punkte[12]) und es) liegen $\mathfrak{W}\,\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{W}\,\mathfrak{B}$ *normal* zueinander, d. h. bei geeigneter Orientierung

---

[8]) Unter *Bogen* bzw. *Kurve* wird ein topologisches Strecken- bzw. Kreisbild verstanden. Bei den Betrachtungen a. a. O.[1]) treten als Ordnungs-Charakteristiken auch Summen zweier Bogen auf; es wird aber a. a. O. gezeigt, daß jeweils nur einer dieser beiden Bogen eine Rolle spielt.

[9]) Damit ist der Fall gemeint, daß $\mathfrak{A}$ eine Kurve ist, welche mit $\mathfrak{R}$ genau einen Punkt gemeinsam hat. Die k Punkte sind auf $\mathfrak{B}$ usw. willkürlich wählbar.

[10]) Dies stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, weil $\mathfrak{B}$ eindimensional ist.

[11]) Es kann f als Verallgemeinerung der numerischen Exzentrizität bei Kegelschnitten gedeutet werden; vgl. a. a. O.[1]), S. 135.

[12]) Im Falle $\mathfrak{A}\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{B}$ höchstens zwei Punkte enthält, liegen $\mathfrak{W}\,\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{W}\,\mathfrak{B}$ trivialerweise normal zueinander.

von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ folgen die Punkte von $\mathfrak{A}\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{W}\mathfrak{A}$ sowohl wie auf $\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ in genau der gleichen (speziell „natürlichen") Anordnung (Reihenfolge) aufeinander; in Zeichen: $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$. Die Negation von „normal" wird mit „anormal" und mit $\bar{N}(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$ bezeichnet. (Vgl. als Beispiele zu Nr. 1. 1. 3. die beiden verschiedenen Parabeln durch vier feste Grundbogenpunkte.)

1. 2. 4. Es ist $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$ und $(\overline{\mathfrak{W}} - \mathfrak{V})\,\mathfrak{B}$ ganz auf einer bestimmten „Seite" von $\mathfrak{A}$ gelegen, also $(\overline{\mathfrak{W}} - \mathfrak{V})\,\mathfrak{B}$ fremd etwa zum[13]) „Äußeren" $a(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$; in Zeichen: $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$. Übrigens ist auch $\mathfrak{V} = (P)$ zugelassen.

Neben den Eigenschaften 1. 2. 1.—1. 2. 4. wird es sich auch um gewisse Kombinationen von ihnen handeln, etwa um diese:

1. 2. 5. Es sei $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{W}$ und $M_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}) = 1$ sowie $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$ (vgl. Nr. 1. 2. 2. sowie Nr. 1. 2. 3.).

1. 2. 6. Es sei $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$ und gleichzeitig $M_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}) = 1$, $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$ und $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$ (vgl. Nr. 1. 2. 2., 1. 2. 3. und 1. 2. 4.).

1. 3. Um im Folgenden Wiederholungen, insbesondere in den Definitionen, zu vermeiden, bezeichnen wir zusammenfassend irgend eine der Eigenschaften 1. 2. 1.—1. 2. 6. einschließlich ihrer Negationen mit $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ oder auch $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$; soweit $\mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{V}$ oder $\mathfrak{W}$ in der jeweils betrachteten Eigenschaft nicht auftritt (vgl. z. B. Nr. 1. 2. 3. oder 1. 2. 4.), ist dafür die einpunktige Menge (P) einzusetzen (also z. B. $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, (P)\ (P)) = M(\mathfrak{A}, \mathfrak{U})$ (Nr. 1. 2. 1.)); und soweit nicht $\mathfrak{U} = (P)$ bzw. $\mathfrak{V} = (P)$ bzw. $\mathfrak{W} = (P)$ ist, soll stets sein $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}$ bzw. $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$ bzw. $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{W}$. Die Gleichung $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$ oder $\mathfrak{A} = E(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ bzw. $\bar{E}(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$ soll besagen, daß $\mathfrak{A}$ die jeweils gemeinte Eigenschaft E besitzt bzw. nicht besitzt ($E(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ ist dabei im allgemeinen mehrwertig). Ist $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$, so sagen wir auch, es sei $\mathfrak{A}$ eine E-Charakteristik (für $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$), oder es gelte $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$.

Wie beispielsweise Nr. 1. 2. 2. b. bei fest vorgegebenem $f \geqq 1$ zeigt, bezieht sich irgend eine Eigenschaft E im allgemeinen nur auf ein Teilsystem $\mathfrak{a}'$ des Systems $\mathfrak{a}$ aller Ordnungs-Charakteristiken; nur soweit Unklarheiten nicht zu befürchten sind, werden wir die Angabe von $\mathfrak{a}'$ weglassen (vgl. auch Nr. 1. 4. 1.).

1. 4. Die verschiedenen, in Nr. 1. 2. eingeführten Eigenschaften — abgesehen jetzt von ihren Negationen — sind erblich gegenüber zulässigen Verkleinerungen von $\mathfrak{W}$ bzw. Vergrößerungen von $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$; das soll besagen: Für 1. 2. 1. und 1. 2. 2. ist $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, (P), (P)) = 1$ für *festes* $\mathfrak{A}$ unempfindlich gegenüber beliebiger Vergrößerung von $\mathfrak{U}$,

[13]) Ist $\mathfrak{A}\mathfrak{R}$ leer oder einpunktig, so ist $a(\mathfrak{A})$ das von $(\mathfrak{A} + \mathfrak{R})$ begrenzte Gebiet. Andernfalls ist $a(\mathfrak{A})$ das von $(\mathfrak{A} + \mathfrak{R} - \mathfrak{R}(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}''))$ begrenzte Gebiet, wobei $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'')$ einen bestimmten der beiden, von $\mathfrak{A}\mathfrak{R} = (A') + (A'')$ begrenzten Teilbogen von $\mathfrak{R}$ bezeichnet (dabei soll $\mathfrak{A}\mathfrak{R}$ nur die zwei Punkte A', A'' enthalten; vgl. a. a. O. [1]), Nr. 1. 2. 1).

also auch $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}', (P), (P)) = 1$, sofern nur $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}'$; für 1. 2. 3. ist

$$E(\mathfrak{A}, (P), (P), \mathfrak{W}) = 1$$

unempfindlich gegenüber Verkleinerung von $\mathfrak{W}$, vorausgesetzt daß $\mathfrak{W}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ nicht geschlossene Kurven sind[14]); für 1. 2. 4. ist

$$E(\mathfrak{A}, (P), \mathfrak{B}, \mathfrak{W}) = 1$$

unempfindlich gegenüber Verkleinerung von $\mathfrak{W}$ und Vergrößerung von $\mathfrak{B}$, sofern diese Veränderungen „*zulässig*" sind, d. h. sofern bei ihnen stets $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{W}$ bleibt; entsprechendes gilt für 1. 2. 5., wenn man als zulässig solche Vergrößerungen von $\mathfrak{U}$ und Verkleinerungen von $\mathfrak{W}$ erklärt, bei welchen stets $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{W}$; für 1. 2. 6. schließlich ist

$$E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W}) = 1$$

unempfindlich gegenüber Vergrößerungen von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ sowie gegenüber Verkleinerungen von $\mathfrak{W}$ und diese Veränderungen sind „zulässig", sofern bei ihnen stets $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{W}$ bleibt und nicht $\mathfrak{W}\mathfrak{A}$ sowie $\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ geschlossene Kurven sind.

Soweit im Folgenden von Erblichkeit einer Eigenschaft E gegenüber zulässigen Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen von $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ bzw. von $\mathfrak{W}$ die Rede ist, soll dies im eben erklärten Sinne, also bei *festem* $\mathfrak{A}$ hinsichtlich der jeweils in Rede stehenden Eigenschaft zu verstehen sein. (Betr. „variables" $\mathfrak{A}$ siehe Nr. 1. 4. 1.)

1. 4. 1. Ist $\mathfrak{a}'$ ein Teilsystem von $\mathfrak{a}$ und gilt $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{W}') = 1$ bei *festen* $\mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{W}'$ für *jedes* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}'$, so sagen wir: *Es gilt*

$$E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}'\, \mathfrak{B}'\, \mathfrak{W}') \quad (= 1)$$

auf $\mathfrak{a}'$. Gilt insbesondere $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{W}')$ auf einer Nachbarschaft (vgl. Nr. 2. 1. 1.) $\mathfrak{a}'\, \varphi\, (\mathfrak{A}', \eta)$ von $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{a}'$, wobei also $\eta = \eta\,(E, \mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{W}', \mathfrak{A}')$ und $\mathfrak{A}' \in \mathfrak{a}'$, so kann man auch $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{W}')$ als stetig *in* $\mathfrak{A}'$ (*auf* $\mathfrak{a}'$) bezeichnen (für feste $\mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{W}'$). Ist dagegen $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W}) = 1$ auf $\mathfrak{a}'$ gleichzeitig für alle $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W}$ eines Systems $\mathfrak{s}$ solcher Umgebungen $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W}$ von P, welche vermöge zulässiger Vergrößerung bzw. Verkleinerung aus gegebenen $\mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{W}'$ erhalten werden, so sagen wir, es sei $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W})$ $(= 1)$ gleichmäßig erblich *auf* $\mathfrak{a}'$ *bezüglich* $\mathfrak{s}$.

Beispiele. 1. Es ist $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}', \mathfrak{W}') = 1$ (vgl. Nr. 1. 2. 4.) stetig in $\mathfrak{A}'$ auf $\mathfrak{a}$, wenn $S(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{W}') = 1$. — 2. Gilt $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$ auf $\mathfrak{a}'$, so ist $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W})$ gleichmäßig erblich auf $\mathfrak{a}'$ bei Verkleinerung von $\mathfrak{W}$, vorausgesetzt daß entweder keine der $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}'$ eine geschlossene Kurve ist oder $\mathfrak{B}$ keine geschlossene Kurve (in $\mathfrak{g}$).

§ 2.

Paratingenten.

Es handelt sich jetzt um die Limiten konvergenter Folgen von Ordnungs-Charakteristiken $\mathfrak{A}_\nu$, welche sämtlich die gleiche Eigenschaft

[14]) Vgl. Haupt, Bemerkungen über Konvexbogen, Monatsh. f. Math. u. Physik 50 (1943), Nr. 1. 6. 2. und 1. 7., I.

$E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W})$ besitzen, allerdings im allgemeinen bezüglich von Umgebungen $\mathfrak{U}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{W}_\nu$, welche Funktionen von ν sind.

2. 1. Folgende Bemerkung sei vorausgeschickt. Da $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{R}$ (wie in Nr. 1. 1.) als beschränkt in E_2 zu Grunde gelegt wird, so ist $\bar{\mathfrak{g}}$ ein Kompaktum[15]); ferner ist der Raum $\mathfrak{c}$ der abgeschlossenen Teilmengen von $\bar{\mathfrak{g}}$ (also der in $\bar{\mathfrak{g}}$ enthaltenen Kompakta), in üblicher Weise metrisiert[16]), selbst ein Kompaktum, insbesondere also vollständig[17]). Weil die Ordnungs-Charakteristiken abgeschlossen sein sollen in $\bar{\mathfrak{g}}$, ist $\mathfrak{a} \in \mathfrak{c}$ und es ist folglich der Limes jeder topologisch (oder, was das Gleiche[18]), jeder metrisch) konvergenten Folge von Ordnungs-Charakteristiken ein Kompaktum (also in $\mathfrak{c}$ enthalten, aber nicht notwendig in $\mathfrak{a}$, weil $\mathfrak{a}$ im allgemeinen nicht als abgeschlossen (in $\mathfrak{c}$) angenommen wird).

2. 1. 1. Ein Kompaktum $\mathfrak{K} \subset \bar{\mathfrak{g}}$ kann also aufgefaßt werden nicht nur als Teilmenge von $\bar{\mathfrak{g}}$, sondern auch als Punkt von $\mathfrak{c}$, in Zeichen $\mathfrak{K} \in \mathfrak{c}$. Um Mißverständnissen bezüglich der jeweiligen Auffassung vorzubeugen, werden wir statt von der ε-Umgebung sei es von $\mathfrak{K} \in \mathfrak{c}$ in $\mathfrak{c}$, sei es einer Menge $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{c}$ in $\mathfrak{c}$, sprechen von der ε-Nachbarschaft $\varphi(\mathfrak{K}, \varepsilon)$ bzw. $\varphi(\mathfrak{m}, \varepsilon)$; hingegen wird unter der ε-Umgebung $\mathfrak{F}(\mathfrak{K}, \varepsilon)$ von $\mathfrak{K}$ verstanden, die ε-Umgebung in $\bar{\mathfrak{g}}$ (d. h. die Menge aller Punkte $P \in \bar{\mathfrak{g}}$, deren Abstand von $\mathfrak{K}$ kleiner ist als $\varepsilon > 0$).

2. 2. Es sei jetzt P ein Punkt von $\mathfrak{B}$, ferner $\mathfrak{a}'$ ein Teil von $\mathfrak{a}$ und es sei $E = E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W})$ für $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}'$ eine der Eigenschaften in Nr. 1. 2. bzw. 1. 3. Weiter sei $\{\mathfrak{U}_\nu\}$, $\{\mathfrak{B}_\nu\}$, $\{\mathfrak{W}_\nu\}$ je eine Folge von Umgebungen von P, welche sich auf P zusammenzieht und wobei $\mathfrak{U}_\nu \subset \mathfrak{B}_\nu \subset \mathfrak{W}_\nu$; soweit $\mathfrak{U} = (P)$ oder usw. (vgl. Nr. 1. 3.), fällt die zugehörige Umgebungsfolge weg. Ferner existiere zu jedem ν (mindestens) eine Ordnungs-Charakteristik $\mathfrak{A}_\nu \in \mathfrak{a}'$ mit $E(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{U}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{W}_\nu) = 1$. Wir bezeichnen dann $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ als eine *E*-Charakteristikenfolge für $P \in \mathfrak{B}$ (auf $\mathfrak{a}'$). Konvergiert[19]) eine *E*-Charakteristikenfolge, so heiße sie *E*-konvergent (wir sprechen auch von *E*-Konvergenz) und ihr Limes werde als eine *E*-Paratingente $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(P; E) = \mathfrak{P}(P; E; \mathfrak{a}')$ *an* $\mathfrak{B}$ *in* $P \in \mathfrak{B}$ (bezüglich des Systems $\mathfrak{a}'$) bezeichnet; es ist $\mathfrak{P}$ Teilmenge von $\bar{\mathfrak{g}}$. Als eine erzeugende (*E*-Charakteristiken-)*Folge* von $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(P; E)$ werde jede *E*-konvergente Folge mit dem Limes $\mathfrak{P}$ bezeichnet (also jede $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ mit $\mathfrak{P} = \lim \mathfrak{A}_\nu$ und $E(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{U}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{W}_\nu) = 1$ sowie mit $(P) = \lim \mathfrak{W}_\nu$).

Die Vereinigung der Punkte (in $\bar{\mathfrak{g}}$) aller *E*-Paratingenten werde als das *E*-Paratingent $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(E) = \mathfrak{p}(P; E; \mathfrak{a}')$ *in* P *an* $\mathfrak{B}$ bezüglich

[15]) D. h. ein metrischer in sich kompakter Raum.

[16]) Vgl. z. B. a) P. Alexandroff-H. Hopf, Topologie I., Berlin 1935, S. 112; auch b) Haupt-Aumann-Pauc, a. a. O. [2a]). Nr. 6. 3. 4. 4.

[17]) Vgl. a. a. O. [16]), a) S. 105.

[18]) Vgl. a. a. O. [16]), a) S. 115 und b) Nr. 6. 3. 4. 4.

[19]) Es handelt sich um topologische, hier also zugleich metrische Konvergenz; vgl. a. a. O. [18]).

E und $\mathfrak{a}'$ bezeichnet, ferner die Menge aller. je als Punkte von $\mathfrak{c}$ aufgefaßten Paratingenten als E-Paratingentenmenge $\pi = \pi(E) = \pi(P; E; \mathfrak{a}')$ *in* P *an* $\mathfrak{B}$. Es ist[20]) $\mathfrak{p} = \sum \overline{\lim}\, \mathfrak{A}_\nu$, die Summation erstreckt über alle E-Charakteristikenfolgen, unter $\overline{\lim}$ den oberen topologischen Limes[21]) von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ bezüglich $\bar{\mathfrak{g}}$ verstanden. Daher[22]) existiert zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(P; \varepsilon)$ von P in $\bar{\mathfrak{g}}$ derart, daß jede Ordnungs-Charakteristik $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}'$ mit $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$ für $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{Z}$ in der ε-Nachbarschaft $\varphi(\pi; \varepsilon)$ von $\pi(P; E; \mathfrak{a}')$ liegt; erst recht gilt also $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{p}; \varepsilon)$ (Nr. 2. 1. 1.) (vgl. Beispiele in Nr. 2. 4. 3. ff.).

2. 3. Unter den E-konvergenten Folgen spielen bei unseren späteren Betrachtungen die N- bzw. $\tilde{N}$-konvergenten (vgl. Nr. 1. 2. 3.) eine ausgezeichnete Rolle. Wir erklären deshalb: Eine E-konvergente Folge $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ (also mit $E(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{U}_\nu, \mathfrak{V}_\nu, \mathfrak{W}_\nu) = 1$) heiße anormal ($E$-)konvergent, wenn zu schließlich jeder der $\mathfrak{A}_\nu$ eine, $\mathfrak{W}_\nu$ enthaltende Umgebung $\mathfrak{W}'_\nu$ von P existiert derart, daß $\{\mathfrak{W}'_\nu\}$ sich auf P zusammenzieht und daß $\mathfrak{W}'_\nu \mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{W}'_\nu \mathfrak{B}$ anormal zueinander liegen (im Sinne von Nr. 1. 2. 3.), also mit $\tilde{N}(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{W}'_\nu) = 1$. (Wir können o. B. d. A. annehmen, daß weder $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W})$ noch $\tilde{N}(\mathfrak{A}, \mathfrak{W})$ von $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ umfaßt werden.) Weiter soll eine E-Paratingente $\mathfrak{P}$ als voll (E-)anormal bezeichnet werden, wenn mindestens eine erzeugende Folge von $\mathfrak{P}$ anormal konvergiert; und es heiße die E-Paratingente $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}(P; E; \mathfrak{a}')$ *halb* (E-)anormal oder kürzer (E-)anormal (schlechthin), wenn in $\mathfrak{P}'$ als Punktmenge von $\bar{\mathfrak{g}}$ aufgefaßt, eine voll anormale E-Paratingente enthalten ist. Eine *voll* anormale E-Paratingente heiße ferner rein (E-)anormal, wenn *jede* ihrer erzeugenden Folgen anormal konvergiert (Beispiele von anormalen, aber nicht voll oder zwar voll, aber nicht rein anormalen Paratingenten in Nr. 2. 4. 3., Anmerkung). Eine *nicht* anormal E-konvergente Charakteristikenfolge bzw. eine nicht anormale E-Paratingente wird als normal (E-)*konvergent* bzw. als (E-)normal bezeichnet; definitionsgemäß ist also eine normale E-Paratingente sozusagen gleichzeitig auch „voll“ und „rein“ normal,

---

[20]) Die Bezeichnung „Paratingent“ nach G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932. — Für den hier vorliegenden allgemeinen Fall vgl. insbesondere Ch. Pauc, Topologie des contingents et paratingents, Rend. Circ. mat. Palermo 62 (1940), speziell auch S. 200. — Eine naheliegende Verallgemeinerung der im Text betrachteten E-Paratingenten besteht darin, daß an Stelle der Punktmengen $\mathfrak{A} \in \mathfrak{k}$ irgendwelche Elemente $\mathfrak{A}^*$ eines (anderen) kompakten Raumes $\mathfrak{k}^*$ treten, welche in jeweils bestimmter Weise (Eigenschaft $\boldsymbol{E}$) m-tupeln von Umgebungen des Punktes P zugeordnet sind. Die hiermit angedeutete Möglichkeit einer Verallgemeinerung der Betrachtungen vorliegender Arbeit soll in anderem Zusammenhang verfolgt werden.

[21]) Vgl. a. a. O. [16]), a) S. 111; b) Nr. 5. 2. 4.

[22]) Vgl. a. a. O. [16]), b) Nr. 5. 2. 4., Satz 1.

d. h. sie besitzt normal konvergente erzeugende Charakteristikenfolgen und keine anormal konvergenten.

Bezeichnet man das System aller normalen bzw. aller anormalen Paratingenten $\mathfrak{P}(P; E; \mathfrak{a}')$ als den

$$(E\text{-})\text{Normalteil } \mathfrak{n} = \mathfrak{n}(E) = \mathfrak{n}(P; E; \mathfrak{a}') \subset \pi \subset \mathfrak{c}$$

bzw. als den

$$(E\text{-})\text{Anormalteil } \tilde{\mathfrak{n}} = \tilde{\mathfrak{n}}(E) = \tilde{\mathfrak{n}}(P; E; \mathfrak{a}') \subset \pi \subset \mathfrak{c}$$

der E-Paratingentenmenge $\pi = \pi(P; E; \mathfrak{a}')$, so gilt:

Der Anormalteil der E-Paratingentenmenge ist stets abgeschlossen in $\mathfrak{c}$, *nicht aber der Normalteil.*

Beweis. Es sei $\{\tilde{\mathfrak{N}}_\nu\}$ eine konvergente Folge von E-anormalen Paratingenten $\tilde{\mathfrak{N}}_\nu = \tilde{\mathfrak{N}}_\nu(P; E; \mathfrak{a}')$ mit dem Limes $\tilde{\mathfrak{N}}$. Definitionsgemäß existiert zu jedem ν eine konvergente Charakteristikenfolge $\{\mathfrak{A}_{\nu\varrho}\}$ mit dem Limes $\tilde{\mathfrak{N}}_\nu$ und mit $E(\mathfrak{A}_{\nu\varrho}, \mathfrak{U}_{\nu\varrho}, \mathfrak{B}_{\nu\varrho}, \mathfrak{W}_{\nu\varrho}) = 1$, $\tilde{N}(\mathfrak{A}_{\nu\varrho}, \mathfrak{W}'_{\nu\varrho}) = 1$, wobei $\mathfrak{W}_{\nu\varrho} \subset \mathfrak{W}'_{\nu\varrho}$ ist und $\{\mathfrak{W}'_{\nu\varrho}\}$ sich für $\varrho \to \infty$ auf P zusammenzieht. Nun läßt sich aber aus der Doppelfolge $\{\mathfrak{W}'_{\nu\varrho}\}$ eine Folge $\{\mathfrak{W}''_\tau\}$ herausheben mit $\mathfrak{W}''_\tau = \mathfrak{W}'_{\nu_\tau \varrho_\tau}$ derart, daß ($\nu_\tau \to \infty$, $\varrho_\tau \to \infty$ für $\tau \to \infty$ und daß $\{\mathfrak{W}''_\tau\}$ sich ebenfalls auf P zusammenzieht. Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{c}$ kann die Auswahl der $\mathfrak{W}''_\tau$ o. B. d. A. so getroffen werden, daß $\{\mathfrak{A}_{\nu_\tau \varrho_\tau}\}$ konvergiert[19]) für $\tau \to \infty$. Dann ist aber $\{\mathfrak{A}_{\nu_\tau \varrho_\tau}\}$ E-anormal konvergent mit dem Limes $\tilde{\mathfrak{N}}$, dieser also E-anormal. Daraus ergibt sich die Abgeschlossenheit von $\tilde{\mathfrak{n}}(P; E; \mathfrak{a}')$. Daß der Normalteil nicht notwendig abgeschlossen ist, ergibt sich aus Nr. 2. 4. 5.

Anmerkung. Man beachte, daß bei allen Ausführungen dieser Nr. 2. 3., insbesondere beim Beweis der Abgeschlossenheit des Anormalteils, keinerlei Besonderheiten von $\tilde{N}(\mathfrak{A}, \mathfrak{W})$ herangezogen werden, daß also $\tilde{N}(\mathfrak{A}, \mathfrak{W})$ irgend eine beliebige Eigenschaft $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{W})$ sein kann. (Vgl. demgegenüber Nr. 4. 3., wo die gleichmäßige Erblichkeit von $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W})$ herangezogen wird.)

2. 3. 1. Da eine anormale E-Paratingente im allgemeinen nicht rein anormal ist (d. h. auch normal-E-konvergente erzeugende Folgen besitzt), so ist nicht trivial die folgende Forderung N: Alle anormalen Paratingenten an $\mathfrak{B}$ in P sind rein anormal, m. a. W.: Alle erzeugenden Folgen nicht nur jeder normalen, sondern auch jeder anormalen E-Paratingente konvergieren E-normal bzw. E-anormal. — Ist Forderung N erfüllt, so sagen wir dementsprechend, der *Grundbogen* $\mathfrak{B}$ sei rein E-normal *im Punkte* P oder: Es besitze $\mathfrak{B}$ in P ein rein (E-)normales Paratingent.

Bei unseren späteren Betrachtungen wird auch die (nicht ohne weiteres vorhandene, vgl. Beispiel in Nr. 2. 4. 5.) Abgeschlossenheit (in $\mathfrak{c}$) des E-Normalteils $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(P; E; \mathfrak{a}')$ wichtig sein; ist nun $\mathfrak{n}$ abgeschlossen und ist zugleich $\mathfrak{n}$ nicht leer, so bezeichnen wir den *Grundbogen* $\mathfrak{B}$ als scharf E-normal *im Punkte* P. Wenn $\mathfrak{B}$ scharf

E-normal ist in P, dann besitzen Normalteil und Anormalteil positiven Abstand voneinander, sofern (auch) der Anormalteil nicht leer ist; in der Tat sind ja $\mathfrak{n}$ und $\tilde{\mathfrak{n}}$ fremd und kompakt ($\pi = \mathfrak{n} + \tilde{\mathfrak{n}}$).

Ist $\mathfrak{B}$ zugleich rein E-normal und scharf E-normal in P, so werde $\mathfrak{B}$ als stark E-normal *in* P bezeichnet (Beispiel in Nr. 2. 4. 1.; vgl. auch Nr. 2. 4. 2., Einleitung).

2. 4. Zur Erläuterung der vorstehenden Definitionen und zugleich ihrer späteren Anwendung seien jetzt einige Beispiele besprochen.

2. 4. 1. *Schmiegkegelschnitte von vorgeschriebener numerischer Exzentrizität an einen dreimal stetig differenzierbaren Bogen* $\mathfrak{B}$.

Unter einem solchen Schmiegkegelschnitt $\mathfrak{K}$ an $\mathfrak{B}$ in $P_0 = (x_0, y_0)$ verstehen wir jeden Limes einer konvergenten Folge aus Kegelschnitten, deren jedem die folgende Eigenschaft E zukommt: Er besitzt eine (für alle diese Kegelschnitte gleiche) vorgeschriebene Exzentrizität und hat mit $\mathfrak{B}$ vier, gegen P_0 konvergierende Punkte gemeinsam. „Vorgegebene numerische Exzentrizität" bedeutet für die Hyperbeln soviel wie „vorgegebener Asymptotenwinkel", d. h. vorgegebene Öffnung derjenigen beiden, von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkelräume, in welchen die Hyperbeläste liegen.

Es sei $\mathfrak{B}$ in einer Umgebung von $P_0 = (x_0 = 0,\ y_0 = 0)$ kartesisches Bild der dort dreimal stetig differenzierbaren Funktion $y = g(x)$ und es sei

$$h(x, y) = (A x^2 + 2 B x y + C y^2) + 2 D x + 2 E y + F = 0$$
$$\text{mit } |A| + |B| + |C| > 0$$

die Gleichung eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}$. Liegen auf $\mathfrak{K}$ die Punkte $P_i = (x_i, y_i = g(x_i))$ von $\mathfrak{B}$, $i = 1, \ldots, 4$, so gilt

(1) $$H(x_i) = 0, \text{ wobei } H(x) = h(x, g(x)), \qquad i = 1, \ldots, 4.$$

Nach dem Mittelwertsatz folgt daraus die Existenz von x-Werten z_j mit $\mathrm{Min}(x_1, \ldots, x_4) < z_j < \mathrm{Max}(x_1, \ldots, x_4)$ und mit

(1′) $$(d^j H(x)/d x^j)_{x = z_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, 3.$$

Setzt man $q(x, y) = A x^2 + 2 B x y + C y^2$ und $Q(x) = q(x, g(x))$, so hat man also

(1′, 1) $$Q(x_1) + 2 D x_1 + 2 E g(x_1) + F = 0,$$

(1′, 2) $$Q'(z_1) + 2 D + 2 E g'(z_1) = 0,$$

(1′, 3) $$Q''(z_2) + 2 E g''(z_2) = 0,$$

(1′, 4) $$Q^{(3)}(z_3) + 2 E g^{(3)}(z_3) = 0.$$

Dazu kommt dann noch die Exzentrizitätsbedingung

(2) $$k = \mathrm{tg}\,\alpha = \pm 2 \frac{\sqrt{B^2 - A C}}{A + C} \quad \text{falls } \alpha \neq \pi/2,$$

wobei das $+$- oder $-$-Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $k > 0$ oder $k < 0$.

Die Elimination von E aus $(1', 3)$ und $(1', 4)$ führt zu

$$Q''(z_2)\, g^{(3)}(z_3) - Q^{(3)}(z_3)\, g''(z_2) = 0. \tag{3}$$

Zur Bestimmung von $A : B : C$ dienen die Gleichungen (2), (3); und durch A, B, C sind dann E, D, F vermöge der in ihnen linearen Gleichungen $(1', 3)$ oder $(1', 4)$, $(1', 2)$, $(1', 1)$ eindeutig festgelegt, falls nur $g''(x_0) \neq 0$ oder $g^{(3)}(x_0) \neq 0$.

O. B. d. A. nehmen wir $x_0 = g(x_0) = g'(x_0) = 0$ an. *Außerdem werde jetzt* $g''(x_0) = g_0'' > 0$ *vorausgesetzt.* Konvergieren dann die x_i, also auch die z_j gegen 0, so gehen die Gleichungen $(1', 1)$ in diejenigen über, welche man aus ihnen durch Einsetzen von $x_0 = 0$ an Stelle bzw. von x_1, z_1, z_2, z_3 erhält und die wir zunächst betrachten wollen. Für $x_i = z_j = 0$ geht (3) über in

$$B = m\,A \text{ mit } m = g_0^{(3)} : 3\,(g_0'')^2, \tag{3_0}$$

ferner $(1', 3)$ in

$$A = -\,g_0''\,E. \tag{3_1}$$

Falls $0 < k^2 < +\infty$, kann o. B. d. A. $A = 1$ gesetzt werden; denn für $A = 0$ folgt $B = 0$ im Widerspruch mit (2). Für $A = 1$ ist also B bekannt und es bleibt zur Bestimmung von C die Gleichung

$$k^2\,C^2 + (4 + 2\,k^2)\,C + (k^2 - 4\,B^2) = 0, \tag{4}$$

welche stets zwei verschiedene, reelle Nullstellen $C' = u$, $C'' = v$ besitzt.

Falls $k^2 = 0$ (Fall der *Parabel*), tritt $B^2 - A\,C = 0$ an Stelle von (2) und es ergibt sich unter Rücksicht auf (3_0):

$$A\,(A\,m^2 - C) = 0; \tag{4'}$$

es entspricht dies dem Fall, daß (4) die Nullstellen $u = \infty$ und $v = B^2$ besitzt.

Falls $k^2 = +\infty$ (*gleichseitige Hyperbel*) ist $A + C = 0$, was dem Fall zweier zusammenfallenden Nullstellen $u = v = -1$ von (4) entspricht.

Für $k^2 < 0$ ist ebenfalls $A \neq 0$ und gilt (4); diese Gleichung kann aber alsdann eine zweifache Nullstelle besitzen, nämlich wenn und nur wenn $1 + k^2(1 + B^2) = 0$ und folglich $u = v = 1 + 2\,B^2 > B^2 > 0$ (Fall der extremen *Ellipse*; reelle Lösungen u, v sind nur für $1 + k^2(1 + B^2) \geqq 0$ vorhanden).

Somit erhält man für $-1 : (1 + B^2) < k^2 < +\infty$ stets zwei verschiedene Schmiegkegelschnitte, und alsdann durch Elimination von k^2 aus (4) bzw. aus

$$k^2\,u\,v = k^2 - 4\,B^2 \text{ und } k^2(u + v) = -\,(4 + 2\,k^2) \tag{5}$$

die in u und v symmetrische Beziehung

$$(B^2 - u)\,(v - B^2) = -\,(1 + B^2)^2 < 0. \tag{6}$$

Sind u bzw. v, also C und mithin A, B, C bestimmt, so ergeben sich E, D, F eindeutig aus $(1', 3)$, $(1', 2)$, $(1', 1)$ für $x_i = z_j = 0$; und zwar ist $D = F = 0$ und $E = -1 : g_0''$, falls $A = 1$.

Wir zeigen noch, daß *für den Fall der Hyperbeln* die beiden Lösungen u, v von (6) den Werten $\pm k$ entsprechen, also Hyperbeln liefern, deren Asymptotenwinkel zueinander supplementär sind. Zu dem Zweck transformieren[23]) wir die Gleichungen unserer Hyperbeln auf Mittelpunktsform (durch Translation der Koordinatenachsen); es ergibt sich

$$-X^2 - 2BXY - uY^2 = E^2 : (B^2 - u) > 0, \tag{7}$$

wobei $A = 1$ und $E = -1 : g_0''$ (vgl. (3_1)). Für $0 < u < B^2$ bzw. für $u < 0$ gehören daher die Asymptoten, wenn etwa $B < 0$, beide dem 1. und 3. Quadranten an bzw. eine dem 1. und 3., die andere dem 2. und 4.; und in beiden Fällen sind die beiden Äste (wie geometrisch einleuchtend) fremd zur X-Achse; entsprechend für $B \geqq 0$. Da nun k^2 wegen (2) abnimmt, wenn $C = u$ von -1 aus wächst oder abnimmt, da ferner für $u < -1$ die Asymptoten stets in verschiedenen Quadranten liegen und da u sich gegensinnig monoton ändert mit dem gemäß (6) zugehörigen v, so folgt: Die zu (gemäß (6)) zusammengehörigen u, v gehörigen (absolut gleichen) Werte von k besitzen verschiedenes Vorzeichen.

Von den Lösungen der Gleichungen (2) und (3), welche sich für $x_i = z_j = 0$ ergeben, können wir (stets unter der Annahme $g_0'' \neq 0$) zurückschließen auf die Lösungen von (2) und (3) für alle zu 0 hinreichend benachbarten x_i, z_j, zunächst *in dem Falle, daß* $k^2 < +\infty$ *und daß* (4) *zwei verschiedene reelle Lösungen besitzt.* Zufolge der dreimal stetigen Differenzierbarkeit von $g(x)$ sind nämlich die Koeffizienten von (4) die für $x_i \to 0$, $z_j \to 0$ sich ergebenden Grenzwerte der Koeffizienten derjenigen, in $C : A$ quadratischen Gleichung (4*), welche aus (2) und (3) durch Elimination von B erhalten wird. Ist nun die Diskriminante Δ von (4) positiv, so auch die von (4*) für alle zu 0 hinreichend benachbarten x_i, z_j. Im Falle $k^2 < +\infty$ ist aber $\Delta \leqq 0$ nur für $k^2 \leqq -(1+B^2)^{-1} = -(1+m^2A^2)^{-1}$. *Im Falle* $k^2 = +\infty$ *hingegen* folgt aus (2), daß $A = -C$, also o. B. d. A. $A = -C = 1$; und es ergibt (3) für B eine *lineare* Gleichung, welche für $x_i \to 0$, $z_j \to 0$ in (3_0) übergeht. Für alle zu 0 hinreichend benachbarten x_i, z_j ist also $A = -C = 1$ und wiederum B eindeutig bestimmt.

Aus dem Vorangehenden läßt sich daher entnehmen:

Das kartesische Bild einer in x_0 *dreimal stetig differenzierbaren Funktion* $g(x)$ *mit* $g''(x_0) \neq 0$ *besitzt in* $(x_0, y_0 = g(x_0))$ *erstens genau eine nicht-ausgeartete und eine ausgeartete Schmiegparabel, von welchen*

---

[23]) Vgl. G. Rost, Algebraische Ableitung des Steinerschen Satzes über die Paare ähnlicher Kegelschnitte in Kegelschnittbüscheln, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl. 1947, S. 115.

letztere die (doppelt zählende) Tangente ist; zweitens genau eine Schmieghyperbel und genau zwei Schmiegellipsen von vorgeschriebener numerischer Exzentrizität e; dabei muß $e > c$ sein, wobei $c \geqq 0$ dem Wert $k^2 = -(1+m^2)^{-1}$ entspricht. Zur Exzentrizität $e = c$ bzw. $e < c$ gehört (höchstens) eine bzw. keine Schmiegellipse[23]).

Wir behaupten weiter:

Unter allen Schmiegkegelschnitten von vorgegebener numerischer Exzentrizität $e \geqq c$ an einen (durch eine in der Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbare Funktion $g(x)$ mit $g''(x_0) \neq 0$ erklärten) Bogen $\mathfrak{B}$ im Punkte $P_0 = (x_0, g(x_0))$ gibt es anormale[24]) *nur im Falle der Parabel ($e = 1$). Und zwar sind dies alle, P_0 enthaltende, in der Parabeltangente* t *(in P_0) enthaltene Halbgeraden, einschließlich* t *selbst. Für alle $e > c$ ist der Bogen stark normal und der Normalteil enthält genau eine (nicht ausgeartete) Hyperbel bzw. Parabel bzw. zwei Ellipsen.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{B}$ in der Umgebung von P_0 konvex. Nach einem früher bewiesenen Satz[25]) ist daher in jedem anormalen Schmiegkegelschnitt, welcher Limes ist von, sich nicht auf einen Punkt zusammenziehenden, nicht-ausgearteten Kegelschnitten konstanter numerischer Exzentrizität, eine (doppeltzählende), P_0 enthaltende Halbgerade enthalten, deren Träger t ist. Daraus folgt die Normalität aller nicht-ausgearteten Schmiegkegelschnitte an $\mathfrak{B}$. Andererseits ist für $E \neq 0$ auch $B^2 - u \neq 0$ und mithin keine Schmieghyperbel oder -ellipse ausgeartet (vgl. (7)). Insbesondere ist also für $e \neq 1$ der Anormalteil leer und die starke Normalität von $\mathfrak{B}$ in P_0 bewiesen. Für $e = 1$ ergibt sich die starke Normalität so: Ist $\mathfrak{h}$ eine beliebig vorgegebene, P_0 enthaltende Halbgerade auf dem Träger t, so existieren Parabeln, welche durch (geeignete) vier, zu P_0 beliebig benachbarte Punkte von $\mathfrak{B}$ gehen, ferner anormal liegen, deren senkrechte Projektion auf t mit $\mathfrak{h}$ identisch ist und welche innerhalb eines beliebig (groß) vorgegebenen Quadrates $\mathfrak{Q}$ beliebig benachbart sind zu $\mathfrak{h}$. Daher ist $\mathfrak{h}$ anormaler Schmiegkegelschnitt. Andererseits existieren (gemäß der Theorie der Kegelschnittbüschel) genau zwei (verschiedene) Parabeln, welche durch *beliebige* vier Punkte P_j von $\mathfrak{B}$ gehen. Für hinreichend nahe bei P_0 gelegene P_j ist die eine dieser Parabeln, etwa P_a, beliebig benachbart zu t in dem Sinne, daß die Koeffizienten ihrer durch $C \neq 0$ dividierten Gleichung, bis auf den Koeffizienten von y^2, welcher gleich 1 ist, absolut beliebig klein sind, daher liegt P_a anormal. Die andere Parabel aber liegt (innerhalb $\mathfrak{Q}$) beliebig nahe bei der nicht-ausgearteten Schmiegparabel und deshalb normal. Somit kon-

[24]) Unter einem *anormalen* Schmiegkegelschnitt wird hier eine E-anormale (Kegelschnitt-)Paratingente verstanden, wenn als Eigenschaft E im Sinne von Nr. 2.2. die eingangs der Nr. 2.4.1. angegebene zu Grunde gelegt wird.

[25]) Vgl. a. a. O.[14]); Nr. 2.7. Von Schmiegkegelschnitten, die aus einem einzelnen Punkt bestehen, ist hierbei abzusehen.

vergiert jede erzeugende Folge einer beliebigen voll anormalen Schmiegparabel anormal, w. z. z. w.

2. 4. 2. In Nr. 2. 4. 1. wurden *Bogen* angegeben, *welche stark normal*, d. h. zugleich rein und scharf normal sind in Bezug auf gewisse Kegelschnittsysteme, als Charakteristikensysteme, nämlich in Bezug auf die Systeme von Kegelschnitten konstanter numerischer Exzentrizität, und in Bezug auf die *Eigenschaft E der Charakteristiken, (mindestens) vier Punkte mit dem Bogen gemeinsam zu haben.* Im Folgenden sollen, unter Beibehaltung dieser Eigenschaft E, Beispiele von (aufeinander abgestimmten) Bogen und Kegelschnittsystemen angegeben werden, bei welchen der Bogen in Bezug auf ein (jeweils passend gewähltes) System von Kegelschnitten nur scharf normal oder nur rein normal oder keines von beiden ist. Bei der Konstruktion dieser Beispiele bedienen wir uns der folgenden

Hilfsbemerkung.

Voraussetzung. Es sei $\mathfrak{c}$ eine Menge von unendlich vielen gleichmäßig beschränkten, keine Strecken enthaltenden Bogen $\mathfrak{C}$, die paarweise fremd sind bis auf den allen gemeinsamen Endpunkt $O = (x = 0, y = 0)$ und deren jeder sich schlicht auf ein Intervall $[0, a]$ der x-Achse (orthogonal) projiziert sowie in O eine mit der positiven x-Achse zusammenfallende Halbtangente besitzt. Jeder der Bogen $\mathfrak{C}$ soll bezüglich der x-Achse nach unten konvex sein und bis auf O ganz oberhalb der x-Achse liegen. Schließlich soll $\mathfrak{c}$ als „obere" bzw. „untere" Schranke je einen (bezüglich der x-Achse nach unten) konvexen Bogen $\bar{\mathfrak{C}}$ bzw. $\underline{\mathfrak{C}}$ besitzen, welcher in O die $+x$-Achse als Halbtangente besitzt und im übrigen oberhalb bzw. nicht unterhalb der x-Achse verläuft, d. h. es soll sein: $0 \leqq \underline{h}(x) < h(x) < \bar{h}(x)$ in $[0, a]$, ferner $\underline{h}(0) = h(0) = \bar{h}(0) = \underline{h}'(0) = \bar{h}'(0) = 0$, wobei $\underline{h}(x)$, $h(x)$, $\bar{h}(x)$ diejenigen Funktionen bedeuten, deren kartesische Bilder $\underline{\mathfrak{C}}$ bzw. $\mathfrak{C}$ bzw. $\bar{\mathfrak{C}}$ sind. O. B. d. A. kann man $\bar{\mathfrak{C}}$ als streckenfrei annehmen; $\underline{\mathfrak{C}}$ kann ganz oder teilweise auf der x-Achse liegen. Die $\mathfrak{C} \in \mathfrak{c}$ sollen sich gegen $\underline{\mathfrak{C}}$ häufen; es soll also $\underline{h}(x) = \inf(h(x); \mathfrak{c})$ sein.

Behauptung. Es existiert ein oberhalb $\underline{\mathfrak{C}}$ verlaufender, streckenfreier, stetig differenzierbarer, (nach unten) konvexer (schlicht auf $[0, a]$ sich projizierender) Bogen $\mathfrak{B}$, welcher mit jedem der Bogen $\mathfrak{C}$ unendlich viele, gegen O sich häufende Punkte gemeinsam hat.

Beweis. Wegen der Konvexität von $\bar{\mathfrak{C}}$ existiert eine, den Punkt $P_1 = (x_1 = a,\ y_1 = h_0(a) = 2^{-1}(\bar{h}(a) + \underline{h}(a))$ enthaltende Gerade g_1, welche $\bar{\mathfrak{C}}$ in zwei Punkten $Q_j' = (x_j', y_j)$, $j = 1, 2$, mit $0 < x_2' < x_1' < a$ trifft und die $+x$-Achse in einem Punkte zwischen 0 und $2^{-1}a$. Auf g_1 existiert ein Punkt $P_2 = (x_2, y_2)$ mit $0 < x_2 < x_2'$, welcher unterhalb $\bar{\mathfrak{C}}$ und oberhalb $\underline{\mathfrak{C}}$ liegt $(\underline{h}(x_2) < y_2 < \bar{h}(x_2))$; weil aber jeder der Bogen $\mathfrak{C}$ von g_1 getroffen wird, kann und soll y_2 überdies so gewählt werden,

daß $\underline{h}(x_2) < y_2 < h_1(x_2)$ ist, wobei $h_1(x)$ der Bedingung

$$\underline{h}(a) < h_1(a) \leqq 2^{-1}(h_0(a) + \underline{h}(a))$$

genügen soll. Ist dann $\mathfrak{C}_1$ das kartesische Bild von $y = h_1(x)$, so wird jeder zwischen $\tilde{\mathfrak{C}}$ und $\mathfrak{C}_1$ liegende Bogen $\mathfrak{C}$ von der abgeschlossenen Strecke $\mathfrak{s}_1 = P_1 P_2$ geschnitten und $\mathfrak{s}_1$ liegt ganz oberhalb $\underline{\mathfrak{C}}$. Auf P_2, x_2, y_2 ist jetzt das gleiche Verfahren anwendbar, wie auf P_1, x_1, y_1, d. h. es gibt eine, $\tilde{\mathfrak{C}}$ in zwei Punkten schneidende, ganz oberhalb $\underline{\mathfrak{C}}$ liegende Strecke $\mathfrak{s}_2 = P_2 P_3$, welche jeden Bogen $\mathfrak{C}$ zwischen $\tilde{\mathfrak{C}}$ und $\mathfrak{C}_2$ trifft, wobei das kartesische Bild $\mathfrak{C}_2 \in \mathfrak{c}$ von $y = h_2(x)$ unterhalb $\mathfrak{C}_1$ liegt und der Bedingung

$$\underline{h}(a) < h_2(a) \leqq 2^{-1}(h_1(a) + \underline{h}(a))$$

genügen soll. Die unbeschränkte Fortsetzung dieses Verfahrens liefert eine Streckensumme $(\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 + \ldots)$, deren abgeschlossene Hülle $\mathfrak{S}$ die für $\mathfrak{B}$ behaupteten Eigenschaften besitzt, abgesehen von der Streckenfreiheit und der stetigen Differenzierbarkeit; diese beiden lassen sich aber unter Erhaltung der übrigen Eigenschaften folgendermaßen erzwingen: Man ersetze jede der Strecken $\mathfrak{s}_n$ durch einen nach unten konvexen, etwa dreimal stetig differenzierbaren, hinreichend flachen Bogen $\mathfrak{B}_n$ und runde alsdann die in den P_n etwa noch vorhandenen Ecken in geeigneter Weise ab.

2. 4. 3. *Beispiel eines weder rein (E-)normalen noch scharf (E-) normalen Bogens.* Wir betrachten als Charakteristiken zunächst nur die Parabeln $\mathfrak{P}'$ mit den Gleichungen $y = p' x^2$, $0 < p' \leqq 1$. Da die Menge der $\mathfrak{P}'$ eine Menge $\mathfrak{c}$ der in Nr. 2. 4. 2., Hilfsbemerkung, angegebenen Art ist, so gibt es einen, die $+x$-Achse in O berührenden, in $[0, a]$ erklärten und oberhalb der x-Achse verlaufenden Konvexbogen $\mathfrak{B}$, welcher mit jeder der Parabeln $\mathfrak{P}'$ unendlich viele, gegen O sich häufende Punkte gemeinsam hat. Die konvexe Summe aus $\mathfrak{B}$ und seinem Spiegelbild bezüglich der y-Achse sei $\mathfrak{B}'$. Dann ist jede der Parabeln $\mathfrak{P}'$ eine normale (weil [25]) nicht ausgeartete) Schmiegparabel an $\mathfrak{B}'$ in O. Und da das System der $\mathfrak{P}'$ normal konvergente Folgen mit der x-Achse als Limes enthält, ist die x-Achse ebenfalls (allerdings ausgeartete) Schmiegparabel an $\mathfrak{B}'$ in O, welche normal konvergente erzeugende Charakteristikenfolgen besitzt. Wir nehmen jetzt als Charakteristiken zu den $\mathfrak{P}'$ noch eine Folge von Parabeln $\mathfrak{P}_n$ hinzu, deren Gleichungen lauten: $(y + b_n)^2 = p_n(x + a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, wobei $p_n > 0$, $a_n > a > 0$, $b_n < 0$, $-a_n + (b_n^2 : p_n) > a > 0$, ferner $p_n \to 0$ und $b_n \to 0$ mit $n \to \infty$ (dabei ist $a > 0$ die oben mit $[0, a]$ eingeführte Zahl), Dann bleiben die $\mathfrak{P}'$ normale Schmiegparabeln, während keine der $\mathfrak{P}_n$, weil O nicht enthaltend, Schmiegparabel an $\mathfrak{B}'$ in O sein kann. Ferner haben schließlich alle $\mathfrak{P}_n$ mit $\mathfrak{B}'$ (mindestens) vier Punkte gemeinsam und jede konvergente Teilfolge von $\{\mathfrak{P}_n\}$ konvergiert anormal gegen eine, O enthaltende, in der x-Achse gelegene Halbgerade. Somit ist

die x-Achse anormale (ausgeartete) Schmiegparabel an $\mathfrak{B}'$ in O und folglich $\mathfrak{B}'$ in O weder scharf noch rein normal (vgl. Nr. 2. 3. 1.). Und dies bleibt erhalten, wenn man die *Gesamtheit aller Parabeln* als Charakteristiken zuläßt.

Anmerkung. Werden nur die $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}_n$ als Charakteristiken zu Grunde gelegt und wird a_n als beschränkt angenommen, so ist *die volle x-Achse anormale Paratingente, obwohl sie selbst keine anormalkonvergente erzeugende Charakteristikenfolge besitzt, sie ist also nicht voll anormal.* Bei nicht-beschränkten a_n ist die volle x-Achse voll, aber nicht rein anormal (vgl. die Definition in Nr. 2. 3.).

2. 4. 4. *Beispiel eines scharf normalen, aber nicht rein normalen Bogens.* Wir betrachten zunächst die Parabeln $\mathfrak{P}^*$ mit den Gleichungen $y = p^* x^2$, $0 < p_0 < p^* \leqq 1$ (in Nr. 2. 4. 3. war $p_0 = 0$). Wie in Nr. 2. 4. 3 konstruieren wir über $[-a, +a]$ einen, die x-Achse in O berührenden Konvexbogen $\mathfrak{B}'$, welcher mit jeder der $\mathfrak{P}^*$ unendlich viele, gegen O sich häufende Punkte gemeinsam hat. Die bei dieser Konstruktion zu benützenden Bogen $\mathfrak{B}_n$ (vgl. Nr. 2. 4. 2., Beweis, Ende) wählen wir als parabolisch konvex[26]), etwa als Umgebungen eines Ellipsenscheitels und zwar derart flach, daß die nicht-ausgeartete Schmiegparabel $\mathfrak{S}_n$ im Scheitel von $\mathfrak{B}_n$ den ganzen Bogen $\mathfrak{B}'$ in ihrem Innern enthält (abgesehen von dem auf ihr liegende Scheitel) und daß die $\mathfrak{S}_n$ mit $n \to \infty$ normal gegen die volle x-Achse konvergieren; solche $\mathfrak{B}_n$ gibt es. Da in beliebiger Umgebung von $\mathfrak{S}_n$ eine Parabel $\mathfrak{P}'_n$ liegt, welche mit $\mathfrak{B}'$ genau vier, auf $\mathfrak{B}_n$ liegende Punkte gemeinsam hat, so können und sollen die $\mathfrak{P}'_n$ so gewählt werden, daß sie mit $n \to \infty$ normal gegen die x-Achse konvergieren. Nimmt man die $\mathfrak{P}^*$ zusammen mit den $\mathfrak{P}'_n$ als Charakteristiken, so sind alle Paratingenten an $\mathfrak{B}'$ in O normal und der Normalteil besteht aus den $\mathfrak{P}^*$ einschließlich $y = p_0 x^2$ sowie aus der x-Achse. Nimmt man noch die $\mathfrak{P}_n$ (Nr. 2. 4. 3.) hinzu, so wird nur die x-Achse zur anormalen Paratingente und damit $\mathfrak{B}'$ in O scharf, aber nicht rein normal. Werden *alle* Parabeln als Charakteristiken zugelassen, so geht auch die scharfe Normalität verloren.

2. 4. 5. *Beispiel eines rein normalen, aber nicht scharf normalen Bogens.* Wir betrachten das System der Parabeln $\mathfrak{P}(r)$ mit den Gleichungen $(r x - y)^2 - r^2 y = 0$, $0 < r \leqq 1$, welche sämtlich die x-Achse in $O = (x = 0,\ y = 0)$ berühren und für hinreichend kleine r in beliebiger Umgebung der positiven x-Achse $\mathfrak{p}$ liegen. Es sei dann wieder $\mathfrak{B}$ ein (gemäß Nr. 2. 4. 2. konstruierter) über $[0, a]$ schlichter, die x-Achse in seinem Endpunkt O berührender Konvexbogen, welcher mit dem durch $y = 2^{-1}\left((2x + r) r - \sqrt{r^3 (4x + r)}\right)$, $0 \leqq x$) definierten, von O ausgehenden Teilbogen von $\mathfrak{P}(r)$ unendlich viele, gegen O sich häufende Punkte gemeinsam hat. Wir ergänzen $\mathfrak{B}$ durch den für

[26]) Vgl. Haupt, Bemerkung über parabolisch konvexe und konkave Ovale, Sitz.-Ber. d. physik.-med. Soz. zu Erlangen 72 (1940/41), S. 217 ff.

$0 \geqq x$ gemäß $y = 0$, wenn $x = 0$, und $y = \exp(-x^{-2})$, wenn $x < 0$, erklärten Bogen $\mathfrak{K}$, welcher für hinreichend kleines $a > 0$ in $[-a, 0]$ konvex (nach unten) und fremd zu allen $\mathfrak{P}(r)$ ist, welcher ferner die x-Achse in seinem Endpunkt O berührt. Der über $[-a, a]$ stehende Teilbogen von $(\mathfrak{B} + \mathfrak{K})$, wo $a > 0$ hinreichend klein, sei $\mathfrak{B}'$. Legen wir jetzt die $\mathfrak{P}(r)$ und nur sie als Charakteristiken zu Grunde, so sind die $\mathfrak{P}(r)$ normale Schmiegparabeln an $\mathfrak{B}'$ in O. Ferner konvergieren die $\mathfrak{P}(r)$ mit $r \to 0$ anormal gegen $\mathfrak{p}$, so daß $\mathfrak{p}$ anormale Paratingente ist. Der Normalteil des Paratingentes ist also nicht abgeschlossen. Andererseits ist für jede konvergente Folge von $\mathfrak{P}(r)$ der Limes entweder eine $\mathfrak{P}(r)$ oder $\mathfrak{p}$ und die Konvergenz ist dann normal bzw. anormal. Somit herrscht reine Normalität.

§ 3.

Bedingungen für $(\gtrless f)$-Gekrümmtheit, für f-Normalität und für s-Normalität des Grundbogens.

3. 1. Wir behandeln zunächst die $(\gtrless f)$-Gekrümmtheit[27]).

3. 1. 1. Erklärung. Es sei $f \geqq 1$ vorgegeben. Dann wird der Grundbogen $\mathfrak{B}$ als $(> f)$-gekrümmt im Punkte P bezeichnet, wenn eine Umgebung $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(P)$ von P existiert mit folgender Eigenschaft: Jede Ordnungs-Charakteristik durch k-Punkte von $\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ ist eine nicht-ausgeartete (n. a.) $(> f)$-Charakteristik im engeren Sinne (i. e. S.)[28]). Unter Bezugnahme auf Nr. 1. 2. 1. läßt sich diese Definition auch so aussprechen: Es gibt eine $\mathfrak{W}$ derart, daß jede $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}$ mit $M(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$ eine n. a. $(> f)$-Charakeristik i. e. S. ist. (Ganz entsprechend wird die $(< f)$-Gekrümmtheit erklärt; für sie gilt daher alles jetzt über $(> f)$-Gekrümmtheit zu Sagende entsprechend).

3. 1. 2. Unserem Programm entsprechend (vgl. Nr. 0. 2.) haben wir jetzt eine Bedingung infinitesimaler Natur aufzustellen, aus welcher die $(> f)$-Gekrümmtheit von $\mathfrak{B}$ in P folgt. Dazu dient folgende Vorbereitung. Wir bezeichnen als *nicht-entartet* jede (E-)Paratingente $\mathfrak{P}$, welche mehrpunktig ist, mit[28a]) $\mathfrak{R}$ höchstens zwei Punkte, aber keine zwei diametralen[29]), gemeinsam hat und durch welche $\mathfrak{g}$ in genau

---

[27]) Vgl. a. a. O. [1]), S. 158.

[28]) Vgl. a. a. O. [1]), S. 134. Es genügt zum Verständnis des Textes, daß die n. a. $(> f)$-Charakteristiken (i. e. S.) Verallgemeinerungen (der einzelnen Äste) derjenigen (nicht-ausgearteten) Kegelschnitte sind, deren numerische Exzentrizität größer ist als f. Den Kegelschnitten der Exzentrizität f_0 entsprechen allgemein die sogen. *f_0-Ordnungs-Charakteristiken* $\mathfrak{A}$, also mit $f(\mathfrak{A}) = f_0$.

[28a]) Vgl. oben im Text Nr. 1. 1.

[29]) Die Punkte von $\mathfrak{R}$ sind einander paarweise zugeordnet vermöge einer topologischen, fixpunktfreien und involutorischen Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf sich; zwei hierdurch einander zugeordnete Punkte von $\mathfrak{R}$ heißen diametral; vgl. a. a. O. [1]), Nr. 1. 2.

zwei fremde, nicht leere Gebiete zerlegt wird, nämlich in das sog. Innere $i(\mathfrak{P})$ von $\mathfrak{P}$ und in das Äußere $a(\mathfrak{P})$ von P; dabei ist $i(\mathfrak{P})$ durch folgende Festsetzung eindeutig bestimmt: Hat $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{R}$ keinen Punkt gemeinsam, so gehört kein Begrenzungspunkt von $i(\mathfrak{P})$ zu $\mathfrak{R}$; hat $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{R}$ genau einen Punkt gemeinsam, so ist dieser zugleich der einzige in $\mathfrak{R}$ gelegene Begrenzungspunkt von $i(\mathfrak{P})$; hat $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{R}$ zwei Punkte gemeinsam, etwa E', E'', so gehöre der Bogen [30]) $\mathfrak{R}(E', E'')$ zur Begrenzung von $i(\mathfrak{P})$. Auf solche nicht-entartete (E-)Paratingenten $\mathfrak{P}$ läßt sich jetzt die ursprünglich nur für n. a. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}$ erklärte nicht negative Funktion $f(\mathfrak{A})$ erweitern vermöge der folgenden Festsetzung: Ist $\mathfrak{R}\mathfrak{P} = 0$, so sei $0 \leqq f(\mathfrak{P}) < 1$ (beliebig); ist $\mathfrak{R}\mathfrak{P} \neq 0$ einpunktig, so sei $f(\mathfrak{P}) = 1$; enthält $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$ genau zwei Punkte, so existiert stets [31]) eine n. a. Ordnungs-Charakteristik i. e. S. $\mathfrak{A}'$, für welche $\mathfrak{R}\mathfrak{P} = \mathfrak{R}\mathfrak{A}'$, und es sei dann $f(\mathfrak{P}) = f(\mathfrak{A}')$ gesetzt; es ist also $f(\mathfrak{A})$ nur abhängig von $\mathfrak{A}\mathfrak{R}$. Ist $f(\mathfrak{P}) > a$ bzw. $f(\mathfrak{P}) < a$, so heiße $\mathfrak{P}$ eine $(> a)$- bzw. $(< a)$-Paratingente (wobei also $\mathfrak{P}$ als nicht-entartet angenommen ist). Wir bezeichnen ferner den *Grundbogen* $\mathfrak{B}$ als $p(> a)$- bzw. $p(< a)$-gekrümmt im Punkte P, wenn jede nicht-entartete M-Paratingente $\mathfrak{P}$ an $\mathfrak{B}$ in P eine $(> a)$- bzw. $(< a)$-Paratingente ist.

Anmerkung. Für die Definition von $f(\mathfrak{P})$ wird nicht benötigt die (erst später Nr. 4. 1. erforderliche) Eigenschaft der nicht-entarteten Paratingenten, $\mathfrak{g}$ in genau zwei Gebiete zu zerlegen. Daher ist auch der Begriff der $(> a)$-Paratingente sowie der der $p(> a)$-Gekrümmtheit unabhängig von besagter Eigenschaft. Soweit daher der Begriff der entarteten Paratingente nur im Zusammenhang mit $(> a)$-Paratingente usw. auftritt, kann in der Definition der ersteren von der in Rede stehenden Zerlegungseigenschaft abgesehen werden.

3. 1. 3. Eine hinreichende Infinitesimalbedingung für $(> f)$-Gekrümmtheit von $\mathfrak{B}$ in P ist nun diese [32]):

Satz. Voraussetzung. *Keine M-Paratingente* (vgl. Nr. 1. 2. 1.) *an* $\mathfrak{B}$ *in* P *sei entartet. Ferner sei* $f(\mathfrak{A})$ *bzw.* $f(\mathfrak{P})$ *stetig auf* $(\mathfrak{a}'' + \pi)$ *in jedem „Punkte" der Paratingentenmenge* $\pi = \pi(P; M; \mathfrak{a}'')$; *dabei bezeichnet* $\mathfrak{a}''$ *das System der nicht-ausgearteten Ordnungs-Charakteristiken im engeren Sinne.*

Behauptung. *Ist* $\mathfrak{B}$ $p(> a)$*-gekrümmt in* P, *so auch* $(> a)$*-gekrümmt* $(1 \leqq a)$.

Beweis. 1. Zufolge der Grundeigenschaften der Charakteristiken ist jede $\mathfrak{A}$ mit $M(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$ eine n. a. Charakteristik i. e. S. [33]), gehört

[30]) Vgl. a. a. O. [1]), Nr. 1. 2. Es genügt für die Betrachtungen des Textes, daß irgend zwei nicht diametralen Punkten E', E'' eindeutig einer der beiden, von ihnen begrenzten Bogen als Bogen $\mathfrak{R}(E'\,E'')$ zugeordnet ist.

[31]) Gemäß einem der für die Charakteristiken zu Grunde gelegten Axiome, vgl. oben im Text Nr. 1. 1. sowie a. a. O. [1]), S. 137.

[32]) Diese Bedingung ist etwas schwächer als die a. a. O. [26]) angedeutete.

[33]) a. a. O. [1]), Nr. 1. 6., II′ a. und III′.

also zu $\mathfrak{a}''$. — 2. Da nach Voraussetzung entartete M-Paratingenten nicht auftreten sollen, so besagt die $p(>a)$-Gekrümmtheit, daß überhaupt *jede* M-Paratingente an $\mathfrak{B}$ in P eine $(>a)$-Paratingente ist. — 3. Weil die Funktion f nach Voraussetzung stetig ist auf $(\mathfrak{a}''+\pi)$ in jeder $\mathfrak{P}\in\pi$, so ist insbesondere $f(\mathfrak{P})$ stetig auf π, besitzt also, da π ein Kompaktum ist, auf π ein Minimum $(a+2b)>a$ (gemäß Ziffer 2). Ferner gibt es eine Nachbarschaft $\varphi=\varphi(\pi)$ von π (in $\mathfrak{c}$), so daß $f(\mathfrak{A})>a+b$ für jede $\mathfrak{A}\in\mathfrak{a}''\varphi$. — 4. Schließlich gehört zu φ eine Umgebung $\mathfrak{W}=\mathfrak{W}(P;\varphi)$ von P (in E_2) derart, daß *jede* $\mathfrak{A}$ mit $M(\mathfrak{A};\mathfrak{W})=1$ in φ, also (gemäß Ziffer 1) in $\mathfrak{a}''\varphi$ liegt. Zufolge Ziffer 3 ist somit für diese Umgebung jede $\mathfrak{A}$ mit $M(\mathfrak{A};\mathfrak{W})=1$ eine n. a. $(>a)$-Charakteristik i. e. S. w. z. z. w.

Anmerkung. Im vorstehenden Beweis wird an speziellen Eigenschaften von $M(\mathfrak{A};\mathfrak{W})$ nur die in Ziffer 1 des Beweises genannte herangezogen.

3.2. Wir wenden uns zur f-Normalität[27]).

3.2.1. Erklärung. Man bezeichnet $\mathfrak{B}$ als f-normal $(f\geqq 1)$ in P, wenn beliebig kleine Umgebungen $\mathfrak{W}=\mathfrak{W}(P)$ von P (in E_2) existieren von folgender Beschaffenheit: Zu beliebiger Umgebung $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}(P)$ von P mit $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{W}$ gibt es n. a. f-Charakteristiken i. e. S. $\mathfrak{A}$ derart, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ mindestens $(k-1)$-Punkte enthält und daß $\mathfrak{W}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ normal zueinander liegen. Diese Definition läßt sich auch so aussprechen: f-Normalität ist die in Nr. 1.2.5. angegebene Eigenschaft bei festem f postuliert für beliebig kleine $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{U}$ und unter Bezugnahme auf das System $\mathfrak{a}''$ der n. a. Ordnungs-Charakteristiken i. e. S.

3.2.2. Eine hinreichende Infinitesimalbedingung für f-Normalität von $\mathfrak{B}$ in P lautet nun[32]):

Satz. Voraussetzung. *Es existiere mindestens eine M_f-normale Paratingente an $\mathfrak{B}$ in P (wobei $f\geqq 1$ gegeben) bezüglich des Systems $\mathfrak{a}''$ der nicht-ausgearteten Charakteristiken im engeren Sinne.*

Behauptung. *$\mathfrak{B}$ ist f-normal in P.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{P}$ eine (gemäß Voraussetzung vorhandene) M_f-normale Paratingente und $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ eine erzeugende Folge von $\mathfrak{P}$, also insbesondere $\mathfrak{A}_\nu\in\mathfrak{a}''$. Der Definition von $\mathfrak{P}$ bzw. von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ entsprechend existieren für jedes ν Umgebungen $\mathfrak{W}_\nu$, $\mathfrak{U}_\nu$ von P, welche sich auf P zusammenziehen, mit $M_f(\mathfrak{A}_\nu,\mathfrak{U}_\nu)=1$, $N(\mathfrak{A}_\nu,\mathfrak{W}_\nu)=1$, $\mathfrak{U}_\nu\subset\mathfrak{W}_\nu$. Wäre nun $\mathfrak{B}$ nicht f-normal in P, so existierte eine, auf P sich zusammenziehende, Folge von Umgebungen $\mathfrak{W}'_\varrho$ von P derart, daß nicht für eine $\mathfrak{U}'_\varrho$ mit $\mathfrak{U}'_\varrho\subset\mathfrak{W}'_\varrho$ und für eine, in $\mathfrak{a}''$ enthaltene f-Charakteristik $\mathfrak{A}'_\varrho$ gleichzeitig $M_f(\mathfrak{A}'_\varrho,\mathfrak{U}'_\varrho)=1$ und $N(\mathfrak{A}'_\varrho,\mathfrak{W}'_\varrho)=1$ gilt. Andererseits existiert aber zu jedem ϱ ein ν_ϱ mit $\mathfrak{W}_{\nu_\varrho}\subset\mathfrak{W}'_\varrho$ und folglich eine $\mathfrak{A}_\varrho=\mathfrak{A}_{\nu_\varrho}\in\mathfrak{a}''$ derart, daß $M_f(\mathfrak{A}'_\varrho,\mathfrak{U}_\varrho)=1$, wobei $\mathfrak{U}'_\varrho=\mathfrak{U}_{\nu_\varrho}\subset\mathfrak{W}_{\nu_\varrho}$. Somit wäre $\tilde{N}(\mathfrak{A}'_\varrho,\mathfrak{W}'_\varrho)=1$ mit $\mathfrak{U}'_\varrho\subset\mathfrak{W}'_\varrho$, also $\{\mathfrak{A}'_\varrho\}$ anormal M_f-konvergent (vgl. Nr. 2.3.: man hat dort zu setzen $E(\mathfrak{A},\mathfrak{U},\mathfrak{V},\mathfrak{W})=E(\mathfrak{A},\mathfrak{U},(P),(P))$

$= M_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U})$). Wegen $\mathfrak{P} = \lim \mathfrak{A}'_\varrho = \lim \mathfrak{A}_\nu$ wäre somit $\mathfrak{P}$ anormal im Widerspruch zur Beweisannahme.

Anmerkung. Im vorstehenden Beweise werden spezielle Eigenschaften von $M_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U})$ nicht benötigt. Der Satz ist daher auch richtig, wenn in der Definition von f-normal an Stelle von M_f eine beliebige Eigenschaft zu Grunde gelegt wird.

3. 3. Schließlich sei noch die s-Normalität[27]) besprochen.

3. 3. 1. Erklärung. Man bezeichnet den Grundbogen $\mathfrak{B}$ als s-normal in P, wenn beliebig kleine Umgebungen $\mathfrak{W}$ von P existieren derart, daß für jede Ordnungs-Charakteristik $\mathfrak{A}$, welche durch k-Punkte von $\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ geht, $\mathfrak{W}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ normal liegen. Diese Definition läßt sich auch so aussprechen: Es existieren beliebig kleine $\mathfrak{W}$, so daß $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$ für *jede* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}$ mit $M(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$ (vgl. Nr. 1. 2. 1. und Nr. 1. 2. 3.).

3. 3. 2. Eine hinreichende Infinitesimalbedingung für s-Normalität ist diese[32]):

Satz. Voraussetzung. *Der Anormalteil des M-Paratingents an* $\mathfrak{B}$ *in P sei leer (dabei sei das Paratingent bezogen auf das System* $\mathfrak{a}$ *aller Charakteristiken).*

Behauptung. *Es ist* $\mathfrak{B}$ *auch s-normal in P.*

Beweis. Für jede, auf P sich zusammenziehende Umgebungsfolge $\{\mathfrak{W}_\nu\}$ existieren (vgl. Nr. 1. 1.) zu jedem ν solche $\mathfrak{A}_\nu \in \mathfrak{a}$, für welche $M(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{W}_\nu) = 1$ (also $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}''$, vgl. Nr. 3. 1. 3., Satz, Beweis, Ziffer 1). Wäre nun die Behauptung nicht richtig, so existierte eine, auf P sich zusammenziehende Umgebungsfolge $\{\mathfrak{W}'_\nu\}$, für welche zu jedem ν eine $\mathfrak{A}'_\nu \in \mathfrak{a}''$ existiert mit $M(\mathfrak{A}'_\nu, \mathfrak{W}'_\nu) = 1$ und $\tilde{N}(\mathfrak{A}'_\nu, \mathfrak{W}'_\nu) = 1$. Da aber $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ eine konvergente Teilfolge enthält und diese anormal M-konvergiert (Nr. 2. 3.), so wäre $\tilde{\mathfrak{n}}(P; M; \mathfrak{a})$ nicht leer, entgegen der Voraussetzung.

Anmerkung. Spezielle Eigenschaften von $M(\mathfrak{A}, \mathfrak{W})$ sind im vorstehenden Beweise nicht herangezogen.

§ 4.

Infinitesimalbedingungen für L_f-Konvexität und -Konkavität[34]).

4. 1. Erklärung. Der Grundbogen $\mathfrak{B}$ wird als L_f-konvex bzw. als L_f-konkav (lokal-f-konvex bzw. -konkav) im Punkte P bezeichnet, $f \geqq 1$, wenn beliebig kleine Umgebungen $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(P)$ von P (im E_r) existieren derart, daß zu jeder beliebig kleinen, in $\mathfrak{W}$ enthaltenen Umgebung $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(P; \mathfrak{W})$ von P eine in $\mathfrak{V}$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(P; \mathfrak{V}; \mathfrak{W})$ von P gehört von folgender Eigenschaft: Ist $\mathfrak{A}$ eine nicht-ausgeartete (n. a.) f-Ordnungs-Charakteristik im engeren Sinne (i. e. S.)[28]), welche durch mindestens $(k-1)$-Punkte von $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ geht und für welche $\mathfrak{W}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ normal zueinander liegen, dann ist $(\overline{\mathfrak{W}} - \mathfrak{V})\,\mathfrak{B}$

[34]) Vgl. a. a. O. [1]), S. 153.

fremd zum Äußern $a(\mathfrak{A})$ bzw. zum Innern $i(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$[13]). (Die Existenz von n. a. Charakteristiken i. e. S. durch $(k-1)$-Punkte von $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ mit zueinander normalen $\mathfrak{W}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ wird in dieser Definition nicht gefordert; existieren solche Charakteristiken nicht, so gilt $\mathfrak{B}$ je nachdem als L_f-konvex(konkav) in P.)

4. 1. 1. Um eine hinreichende Bedingung infinitesimalen Charakters für L_f-Konvexität zu finden — für L_f-Konkavität gilt alles entsprechend — bemerken wir, daß L_f-Konvexität mit der in Nr. 1. 2. 6. angegebenen Eigenschaft, postuliert für beliebig kleine $\mathfrak{W}$ usw. und bezogen auf *das System* $\mathfrak{a}''$ *der n. a. Charakteristiken i. e. S.*, identisch ist. Wir wollen diese, aus $M_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}) = 1$, $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$ und $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$ (vgl. Nr. 1. 2. 4.) kombinierte Eigenschaft mit $L_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ *bezeichnen.*

Indem wir diese Eigenschaft ins Infinitesimale übertragen, erklären wir den Grundbogen $\mathfrak{B}$ als p_f-konvex im Punkte P, wenn folgendes gilt: Es existiert eine Umgebung $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(P)$ von P (in E_r) derart, daß $(\overline{\mathfrak{W}} - (P))\,\mathfrak{B}$ fremd ist zu $(\mathfrak{P} + a(\mathfrak{P}))$ für jede *nicht-entartete*, normale M_f-Paratingente $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(P; M_f; \mathfrak{a}'')$, in *Zeichen:* $S'(\mathfrak{P}, (P), \mathfrak{W}) = 1$. Bei zulässiger Vergrößerung bzw. Verkleinerung von (P) bzw. $\mathfrak{W}$ ist S' erblich; es folgt also aus $S'(\mathfrak{P}, (P), \mathfrak{W}) = 1$ auch $S'(\mathfrak{P}, \mathfrak{V}', \mathfrak{W}') = 1$, sofern nur $(P) \subset \mathfrak{V}' \subset \mathfrak{W}' \subset \mathfrak{W}$. Dabei besagt $S'(\mathfrak{P}, \mathfrak{V}', \mathfrak{W}') = 1$, daß $(\overline{\mathfrak{W}} - \mathfrak{V}')\,\mathfrak{B}\,(\mathfrak{P} + a(\mathfrak{P}))$ leer. Die bei Ersetzung von $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{A}$ sich ergebende Aussage $S'(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}', \mathfrak{W}') = 1$ fordert etwas mehr als die, der L_f-Konvexität zu Grunde liegende Aussage $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}', \mathfrak{W}') = 1$, weil bei ersterer $(\mathfrak{W}' - \mathfrak{V}')\,\mathfrak{B}$ fremd sein soll zu $(\mathfrak{A} + a(\mathfrak{A}))$, bei letzterer aber nur zu $a(\mathfrak{A})$ (vgl. Nr. 1. 2. 4.).

4. 2. Mit Hilfe des Begriffes der p_f-Konvexität gelangt man zu folgender hinreichender Bedingung für L_f-Konvexität[32]):

Satz. Voraussetzung. *Der Grundbogen* $\mathfrak{B}$ *sei im Punkte* P *sowohl stark* M_f*-normal als* p_f*-konvex (bezüglich* $\mathfrak{a}''$*). Ferner sei der Normalteil der* M_f*-Paratingentenmenge* $\pi(P; M_f; \mathfrak{a}'')$ *an* $\mathfrak{B}$ *in* P *nicht leer und enthalte nur nicht-entartete Paratingenten.*

Behauptung. *Es ist* $\mathfrak{B}$ *in* P *auch* L_f*-konvex.*

Beweis. Wir benutzen zwei Hilfssätze ziemlich allgemeiner Natur, welche wir erst hinterher (Nr. 4. 3. und 4. 4.) beweisen werden. — 1. Wir setzen $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = M_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}) = E$, wobei $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}''$. Da $\mathfrak{B}$ als stark M_f-normal in P vorausgesetzt ist und da jede f-Ordnungs-Charakteristik Punkte mit $\mathfrak{R}$ gemeinsam hat, also keine geschlossene Kurve in $\mathfrak{g}$ ist (vgl. Nr. 4. 3., Anmerkung), so sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes in Nr. 4. 3. erfüllt, wenn dort $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}''$, also $\mathfrak{a}'$ als das System aller n. a. Charakteristiken i. e. S. gewählt wird. Somit existiert zu jeder hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{X}'$ von P ein $c = c(\mathfrak{X}') > 0$ und zu beliebigem ε' mit $0 < \varepsilon' < c$ eine Umgebung $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}(\mathfrak{X}'; \varepsilon') \subset \mathfrak{X}'$ von P derart, daß für jede, in $\mathfrak{Y}'$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{U}$ von P jede Charakteristik $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}''$ mit $M_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}) = 1$ jedenfalls dann in $\varphi(n(E), \varepsilon')$

liegt, wenn $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}') = 1$; dabei ist $\mathfrak{n}(E)$ der Normalteil von $\pi(P; E; \mathfrak{a}'')$ mit $E = M_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U})$. — 2. Es ist aber auch der Hilfssatz in Nr. 4. 4. anwendbar. Wegen der vorausgesetzten starken M_f-Normalität ist nämlich $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}(E)$ ein Kompaktum ($E = M_f$, vgl. Ziffer 1.) und enthält überdies nach Annahme nur nicht-entartete E-Paratingenten und zwar mindestens eine. Setzt man ferner $F^* = F(\mathfrak{P}, (P), \mathfrak{V}', \mathfrak{W}') = S'(\mathfrak{P}, \mathfrak{V}', \mathfrak{W}')$ und $F(\mathfrak{A}, (P), \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = S'(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$, wo S' im Sinne von Nr. 4. 1. 1. erklärt ist, so gilt F^* auf $\mathfrak{k}$ für $\mathfrak{V}' = (P)$ und festes $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}'(P)$ mit $(P) \subset \mathfrak{V}' \subset \mathfrak{W}'$ (wegen der vorausgesetzten p_f-Konvexität von $\mathfrak{B}$ in P); aus der Definition von S' folgt weiter, daß F^* gleichmäßig erblich ist auf $\mathfrak{k}$ bezüglich des Systems s aller Tripel (P), $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ mit $(P) \subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}'$ sowie daß $F(\mathfrak{A}, (P), \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ stetig ist in jeder $\mathfrak{A} \in \mathfrak{b} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a}''$ für jedes Paar $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ mit $(P) \subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{V} \neq (P)$. Gemäß Nr. 4. 4. gibt es daher zu jedem Paar beliebig kleiner $\mathfrak{V}''$, $\mathfrak{W}''$ mit $(P) \neq \mathfrak{V}'' \subset \mathfrak{W}'' \subset \mathfrak{W}'$ ein $\varepsilon'' = \varepsilon''(\mathfrak{V}'', \mathfrak{W}'')$ und eine Nachbarschaft $\varphi(\mathfrak{k}; \varepsilon'')$ von $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{b}$, so daß $S'(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}'', \mathfrak{W}'') = 1$ für jede $\mathfrak{A} \in \varphi(\mathfrak{k}; \varepsilon'')$. — 3. Da $\mathfrak{X}'$ in Ziffer 1 und $\mathfrak{W}''$ in Ziff. 2 beliebig (klein) gewählt werden können, dürfen wir $\mathfrak{W} = \mathfrak{X}' = \mathfrak{W}''$ setzen. Ist jetzt $\mathfrak{V}''$ eine (beliebige) in $\mathfrak{W}$ enthaltene Umgebung von P, ferner $c = c(\mathfrak{X}')$ und $\varepsilon'' = \varepsilon''(\mathfrak{V}'', \mathfrak{W})$ wie in Ziffer 1 bzw. Ziffer 2 angenommen, so werde ε gemäß $0 < \varepsilon < \mathrm{Min}\,(c, \varepsilon'')$ gewählt. Mit $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}(\mathfrak{X}'; \varepsilon)$ gemäß Ziffer 1 setzen wir dann $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}''\mathfrak{Y}'$ und $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}''$. — 4. Aus den Festsetzungen in Ziffer 3 folgt: Existiert eine Charakteristik $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}''$ mit $M_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}) = 1$, so gilt für diese $\mathfrak{A}$ (gemäß Ziffer 1 wegen $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{Y}'$ und $0 < \varepsilon < c$) auch $\mathfrak{A} \in \varphi(\mathfrak{n}(E), \varepsilon)$, falls $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$, und wegen $\varepsilon < \varepsilon''$ umsomehr $\mathfrak{A} \in \varphi(\mathfrak{n}(E), \varepsilon'')$. Daraus folgt gemäß Ziff. 2, daß $S'(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$ für jede $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}''$ mit $M_f(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}) = 1$ und $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$. Weil aber $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$ aus $S'(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$ folgt, ist $\mathfrak{B}$ auch L_f-konvex in P, w. z. z. w.

Anmerkung. Aus den in Nr. 4. 3. und 4. 4. über die jeweils betrachteten Eigenschaften gemachten Annahmen ersieht man leicht, daß der vorstehende Satz auch für allgemeinere Eigenschaften E und F (statt M_f und S') gilt, sofern sie nur gewissen Erblichkeits- und Stetigkeitsforderungen genügen.

4. 3. Der erste, beim Beweise in Nr. 4. 2. benutzte Hilfssatz lautet:

Voraussetzung. Es sei $\mathfrak{B}$ ein Grundbogen und $\mathfrak{a}'$ eine Menge von Ordnungs-Charakteristiken. Ferner sei eine Eigenschaft $N = N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W})$ gleichmäßig erblich auf $\mathfrak{a}'$ bei Verkleinerung von $\mathfrak{W}$. Endlich sei auf $\mathfrak{a}'$ eine Eigenschaft $E = E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ gegeben; der bezüglich N (vgl. Nr. 2. 3., Anmerk.) gebildete „Normal-" Teil $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(E)$ der E-Paratingentenmenge $\pi = \pi(P; E; \mathfrak{a}')$ von $\mathfrak{B}$ im Punkte P sei nicht leer.

Behauptung. Zu jeder hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(P)$ von P (in E_3) existiert ein $c = c(\mathfrak{X}) > 0$, so daß zu beliebigem ε mit $0 < \varepsilon < c$ eine in $\mathfrak{X}$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(\mathfrak{X}, \varepsilon)$ von P gehört von folgender Beschaffenheit: Damit für alle Tripel $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ von Umgebungen von P, welche in $\mathfrak{Y}$ enthalten sind und für welche $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$, eine Ordnungs-

Charakteristik $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}'$ mit $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$ in der ε-Nachbarschaft $\varphi(\mathfrak{n}(E), \varepsilon)$ von $\mathfrak{n}(E)$ liegt, ist die Bedingung $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}) = 1$ *notwendig*, falls $\mathfrak{V}$ nur scharf E-normal *bezüglich* N ist in P, bzw. *hinreichend*, falls $\mathfrak{V}$ nur rein E-normal *bezüglich* N ist in P.

Anmerkung. Die gleichmäßige Erblichkeit von N (vgl. Voraussetzung) ist gesichert, falls N im Sinne von Nr. 1. 2. 3. gedeutet wird und falls $\mathfrak{a}'$ nur f-Charakteristiken, also keine in $\mathfrak{g}$ geschlossene Kurve enthält (vgl. Nr. 1. 4. 1., Beispiel 2).

Beweis. „*Notwendig*". Es sei also $\mathfrak{V}$ scharf E-normal in P. Dann gibt es ein $c' > 0$, so daß $\varphi(\mathfrak{n}(E), c')$ und $\varphi(\tilde{\mathfrak{n}}(E), c')$ positiven Abstand besitzen (vgl. Nr. 2. 3. 1.). Unter Benutzung der (mit der scharfen E-Normalität geforderten) Abgeschlossenheit von $\mathfrak{n}(E)$ zeigen wir (indirekt): Zu jeder hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{X}$ von P gibt es ein $c = c(\mathfrak{X})$ mit $0 < c < c'$ von folgender Art: Ist ε im Rahmen der Ungleichung $0 < \varepsilon < c$ beliebig gewählt, sind ferner $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ mit $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$ in $\mathfrak{X}$ enthalten und im übrigen beliebig, so gilt $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{W}) = 1$ für jede $\mathfrak{A} \in \varphi(\mathfrak{n}(E), \varepsilon)$ mit $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$. In der Tat: Andernfalls existierte eine Folge von auf P sich zusammenziehenden Umgebungen $\mathfrak{X}_\nu$ von P, ferner eine zu $\mathfrak{X}_\nu$ gehörige Nullfolge positiver $\varepsilon_{\nu\varrho}$ sowie zugehörige, in $\mathfrak{X}_\nu$ enthaltene $\mathfrak{U}_{\nu\varrho}$, $\mathfrak{V}_{\nu\varrho}$, $\mathfrak{W}_{\nu\varrho}$ und dazu (mindestens) eine Charakteristik $\mathfrak{A}_{\nu\varrho}$ mit $E(\mathfrak{A}_{\nu\varrho}, \mathfrak{U}_{\nu\varrho}, \mathfrak{V}_{\nu\varrho}, \mathfrak{W}_{\nu\varrho}) = 1$, mit $\mathfrak{A}_{\nu\varrho} \in \varphi(\mathfrak{n}(E), \varepsilon_{\nu\varrho})$ und zugleich auch mit $\tilde{N}(\mathfrak{A}_{\nu\varrho}, \mathfrak{X}_{\nu\varrho}) = 1$. In der Doppelfolge $\{\varepsilon_{\nu\varrho}\}$ ist eine Nullfolge $\{\varepsilon'_\tau\}$ enthalten derart, daß $\varepsilon'_\tau = \varepsilon_{\nu_\tau \varrho_\tau}$ mit $\nu_\tau \to \infty$, $\varrho_\tau \to \infty$ für $\tau \to \infty$. Die zugehörige Folge $\{\mathfrak{A}'_\tau\}$ mit $\mathfrak{A}'_\tau = \mathfrak{A}_{\nu_\tau \varrho_\tau}$ kann o. B. d. A. als konvergent angenommen werden (weil $\mathfrak{c}$ ein Kompaktum, Nr. 2. 1.). Die Folge der zugehörigen $\mathfrak{X}'_\tau = \mathfrak{X}_{\nu_\tau}$ zieht sich auf P zusammen, ferner ist $E(\mathfrak{A}'_\tau, \mathfrak{U}'_\tau, \mathfrak{V}'_\tau, \mathfrak{W}'_\tau) = 1$, $\mathfrak{A}'_\tau \in \varphi(\mathfrak{n}(E), \varepsilon'_\tau)$ und $\tilde{N}(\mathfrak{A}'_\tau, \mathfrak{X}'_\tau) = 1$. Somit ist $\mathfrak{A}' = \lim \mathfrak{A}'_\tau$ in $\tilde{\mathfrak{n}}(E)$ enthalten. Andererseits aber ist $\mathfrak{A}' \in \mathfrak{n}(E)$, wegen $\mathfrak{A}'_\tau \in \varphi(\mathfrak{n}(E), \varepsilon'_\tau)$, wegen $\varepsilon'_\tau \to 0$ und wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{n}(E)$. Widerspruch.

„*Hinreichend*". Es genügt, daß folgendes bewiesen wird: Zu hinreichend kleinen, im übrigen beliebigen $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(P)$, $c(\mathfrak{X})$ und $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < c(\mathfrak{X})$ existiert eine Umgebung $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(P, \mathfrak{X}, \varepsilon)$ von P derart, daß für beliebige, in $\mathfrak{Y}$ enthaltene $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ mit $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$ aus $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$ und $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}) = 1$ auf $\mathfrak{A} \in \varphi(\mathfrak{n}(E), \varepsilon)$ geschlossen werden kann. Beweis indirekt: Andernfalls existierten zu beliebig kleinem $\mathfrak{X}$ beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und dazu Folgen von Umgebungen $\mathfrak{Y}_\nu$ nebst in $\mathfrak{Y}_\nu$ enthaltenen $\mathfrak{U}_\nu$, $\mathfrak{V}_\nu$, $\mathfrak{W}_\nu$ derart, daß die $\mathfrak{Y}_\nu$ sich auf P zusammenziehen und daß $\mathfrak{A}_\nu \in \mathfrak{a}'$ existieren, welche nicht in $\varphi(\mathfrak{n}(E), \varepsilon)$ liegen, während zugleich $E(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{U}_\nu, \mathfrak{V}_\nu, \mathfrak{W}_\nu) = 1$ und $N(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{X}) = 1$. Es sei $\{\mathfrak{A}'_\tau\}$ mit $\mathfrak{A}'_\tau = \mathfrak{A}_{\nu_\tau}$ eine (stets vorhandene) konvergente Teilfolge von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ mit dem Limes $\mathfrak{P}'$; wegen $\mathfrak{P}' \in \pi(P; E; \mathfrak{a}') - \varphi(\mathfrak{n}(E), \varepsilon)$ ist $P \in \tilde{\mathfrak{n}}(E)$. Im Widerspruch damit ist aber auch $\mathfrak{P}' < \mathfrak{n}(E)$. In der Tat: Für die erzeugende Folge $\{\mathfrak{A}'_\tau\}$ von $\mathfrak{P}'$ gilt $N(\mathfrak{A}'_\tau, \mathfrak{X}) = 1$, also wegen der gleichmäßigen Erblich-

keit von N auf $\mathfrak{a}^* = \sum(\mathfrak{A}'_\tau)$ (vgl. Voraussetzung) auch $N(\mathfrak{A}'_\tau, \mathfrak{W}''_\tau) = 1$ für *jede*, auf P sich zusammenziehende Folge von Umgebungen $\mathfrak{W}''_\tau$ des Punktes P, für welche $\mathfrak{W}'_\tau = \mathfrak{W}_{\nu_\tau} \subset \mathfrak{W}''_\tau \subset \mathfrak{X}$. Es konvergiert somit $\{\mathfrak{A}'_\tau\}$ nicht anormal (vgl. Nr. 2. 3.). Gemäß der reinen E-Normalität von $\mathfrak{B}$ in P ist daher $\mathfrak{P}' \in \mathfrak{n}(E)$, w. z. z. w.

4. 4. Während der vorangehende Hilfssatz (Nr. 4. 3) sich auf E-Normalität des Grundbogens bezieht, enthält der jetzt zu besprechende eine naheliegende Bemerkung bezüglich solcher Eigenschaften F, als deren für uns wichtigster Repräsentant die Eigenschaft S' (vgl. Nr. 4. 1. 1.) gelten (und an welcher man sich den Inhalt des nachstehenden Hilfssatzes veranschaulichen kann).

Hilfssatz. Voraussetzung. Es sei $\mathfrak{k}$ ein (nicht leeres) Kompaktum im Raum $\bar{\mathfrak{a}}$, auf welchem die Eigenschaft $F^* = F(\mathfrak{P}, \mathfrak{U}', \mathfrak{V}', \mathfrak{W}')$ für jede $\mathfrak{P} \in \mathfrak{k}$ und für ein festes (von $\mathfrak{P}$ nicht abhängiges) Tripel $\mathfrak{x}' = (\mathfrak{U}', \mathfrak{V}', \mathfrak{W}')$ von Umgebungen von $P \in \mathfrak{B}$ gilt, wobei $\mathfrak{U}' = (P), \mathfrak{V}' = (P)$ zugelassen ist ($\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{V}' \subset \mathfrak{W}'$). Ferner sei $F(\mathfrak{P}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ gleichmäßig erblich auf $\mathfrak{k}$ bezüglich des Systems s derjenigen Umgebungstripel $\mathfrak{x} = (\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$, welche aus $\mathfrak{x}' = (\mathfrak{U}', \mathfrak{V}', \mathfrak{W}')$ durch zulässige Vergrößerung bzw. Verkleinerung erhalten werden (vgl. Nr. 1. 4.). Endlich sei $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ erklärt auf einer in $\bar{\mathfrak{a}}$ enthaltenen Obermenge $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{k}$ und stetig in jedem $\mathfrak{A} \in \mathfrak{b}$ für jedes (jeweils feste) Tripel $\mathfrak{x} \in s'' = s - (\mathfrak{x}')$.

Behauptung. Zu jedem Tripel $\mathfrak{x}'' = (\mathfrak{U}'', \mathfrak{V}'', \mathfrak{W}'') \in s''$ gibt es (ein $\varepsilon'' = \varepsilon''(\mathfrak{x}'') > 0$ und) eine Nachbarschaft $\varphi(\mathfrak{k}, \varepsilon'')$ von $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{b}$, auf welcher $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}'', \mathfrak{V}'', \mathfrak{W}'') = 1$ ist.

Zusatz. Ist $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ überdies gleichmäßig erblich bezüglich s auf einer Menge $\mathfrak{a}' \subset \bar{\mathfrak{a}}$, so gilt $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ sogar gleichmäßig auf $\mathfrak{a}'\varphi(\mathfrak{k}; \varepsilon'')$ für alle zulässigen $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ mit $\mathfrak{U}'' \subset \mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}'' \subset \mathfrak{V}$, $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}''$.

Beweis. Gemäß der vorausgesetzten gleichmäßigen Erblichkeit von F auf $\mathfrak{k}$ folgt aus $F(\mathfrak{P}, \mathfrak{U}', \mathfrak{V}', \mathfrak{W}') = 1$ auch $F(\mathfrak{P}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = 1$ für $\mathfrak{x} = (\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}) \in s''$ und für jede $\mathfrak{P} \in \mathfrak{k}$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ für jedes einzelne $\mathfrak{x}'' = (\mathfrak{U}'', \mathfrak{V}'', \mathfrak{W}'') \in s''$ gibt es zu jeder $\mathfrak{P} \in \mathfrak{k}$ und zu jedem $\mathfrak{x}'' \in s''$ ein $\varepsilon'' = \varepsilon(\mathfrak{P}, \mathfrak{x}'') > 0$ derart, daß $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}'', \mathfrak{V}'', \mathfrak{W}'') = 1$ für jede $\mathfrak{A} \in \mathfrak{b}\varphi(\mathfrak{P}, \varepsilon'')$; dabei ist also nicht notwendig $\mathfrak{A} \in \mathfrak{k}$. Da $\mathfrak{k}$ ein Kompaktum ist, gibt es endlich viele $\mathfrak{P}$, etwa $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_m$, so daß $\mathfrak{k} \subset \varphi'' = \sum \mathfrak{b}\varphi(\mathfrak{P}_\mu, \varepsilon''_\mu)$ mit $\varepsilon''_\mu = \varepsilon(\mathfrak{P}_\mu, \mathfrak{x}''_\mu)$, $\mu = 1, \ldots, m$; außerdem existiert ein $\varepsilon' > 0$, für welches $\varphi(\mathfrak{k}, \varepsilon') \subset \varphi''$, so daß $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{U}'', \mathfrak{V}'', \mathfrak{W}'') = 1$ für jede $\mathfrak{A} \in \mathfrak{b}\varphi(\mathfrak{k}, \varepsilon)$, w. z. z. w. — Der Zusatz ergibt sich jetzt unmittelbar.

(Eingegangen am 27. Juni 1947.)

Über eine zur Laplaceschen Differentialgleichung in drei Veränderlichen gehörige Funktionentheorie I.

Von

E. Lammel in Tutzing/Starnberg, Oberbayern.

Bevor wir daran gehen, die Grundgedanken darzulegen, aus welchen sich eine Funktionentheorie ergeben soll, die für die Laplacesche Differentialgleichung in drei Variablen eine analoge Bedeutung hat wie die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen für die Laplacesche Differentialgleichung in zwei Variablen, wollen wir zunächst als Einleitung aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen (x, y) diejenigen Stellen aufzeigen, welche sich für die zu entwickelnde Theorie der Funktionen „einer komplexen Veränderlichen (x, y, z)" als geeignete Ansatzpunkte erweisen werden.

Einleitung.

Wir fragen nach den homogenen Polynomen n-ten Grades in x und y, welche Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

sind.

Das allgemeinste homogene Polynom n-ten Grades $U_n(x, y)$ hat die Gestalt

$$U_n(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \binom{n}{\nu} x^{n-\nu} y^\nu. \tag{2}$$

Für $n \geqq 2$ erhalten wir

$$\frac{\partial^2 U_n(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_n(x,y)}{\partial y^2} = \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{n!}{\nu!\,(n-\nu-2)!} (a_\nu + a_{\nu-2})\, x^{n-\nu-2} y^\nu.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß $U_n(x, y)$ dann und nur dann eine Lösung von (1) wird, wenn

$$a_\nu + a_{\nu+2} = 0; \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

ist.

Aus (3) ergibt sich

$$a_{2k} = (-1)^k a_0, \quad a_{2k+1} = (-1)^k a_1; \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Durch Vorgabe von a_0 und a_1 sind also alle anderen Koeffizienten von $U_n(x, y)$ bestimmt, wenn es zugleich eine Lösung von (1) sein soll.

Nach (2) ist $U_1(x, y) = a_0 x + a_1 y$, was stets die Laplacesche Differentialgleichung (1) befriedigt.

Es gilt also folgender Satz: Jedes homogene Polynom n-ten Grades $U_n(x, y)$, welches zugleich Lösung von (1) ist, läßt sich in der Gestalt

$$U_n(x, y) = a_0 u_n(x, y) + a_1 v_n(x, y); \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

schreiben, wobei

$$u_n(x, y) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} y^{2k} \quad \text{und} \tag{5}$$

$$v_n(x, y) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{2k-1} x^{n-(2k-1)} y^{2k-1} \tag{6}$$

ist.

Jedes homogene Polynom n-ten Grades $U_n(x, y)$, welches der Laplaceschen Differentialgleichung genügt, bezeichnet man als ein harmonisches Polynom n-ten Grades. (4) zeigt, daß die Linearform aus den beiden speziellen harmonischen Polynomen $u_n(x, y)$ und $v_n(x, y)$ mit beliebigen konstanten Koeffizienten die Gesamtheit der harmonischen Polynome n-ten Grades liefert. Deshalb bezeichnet man $u_n(x, y)$ und $v_n(x, y)$ als eine Basis für die harmonischen Polynome n-ten Grades in x und y.

Das Funktionenpaar $u_n(x, y)$, $v_n(x, y)$ wollen wir nun im folgenden näher betrachten.

Wir fragen zunächst danach, wie sich das zum Grade $n + 1$ gehörige Funktionenpaar $u_{n+1}(x, y)$, $v_{n+1}(x, y)$ aus dem zum Grade n gehörigen berechnen läßt.

Nach dem Satze von Euler über homogene Funktionen erhalten wir

$$(n+1)\, u_{n+1}(x, y) = x \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} + y \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} \quad \text{und}$$

$$(n+1)\, v_{n+1}(x, y) = x \frac{\partial v_{n+1}}{\partial x} + y \frac{\partial v_{n+1}}{\partial y}.$$

Nun folgt aus (5) bzw. (6)

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} = (n+1)\, u_n, \quad \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} = -(n+1)\, v_n \tag{7}$$

$$\frac{\partial v_{n+1}}{\partial x} = (n+1)\, v_n, \quad \frac{\partial v_{n+1}}{\partial y} = (n+1)\, u_n \tag{8}$$

und mithin ergibt sich, wenn wir noch beachten, daß $x = u_1(x, y)$ und $y = v_1(x, y)$ ist,

$$u_{n+1} = u_n u_1 - v_n v_1 \quad \text{und} \quad v_{n+1} = v_n u_1 + u_n v_1. \tag{9}$$

Durch vollständige Induktion läßt sich mit Hilfe von (9) leicht beweisen, daß auch

$$u_{l+m} = u_l u_m - v_l v_m \quad \text{und} \quad v_{l+m} = v_l u_m + u_l v_m. \tag{10}$$

Aus (7) und (8) ersieht man noch, daß jedes zum Grade k gehörige Funktionenpaar $u_k(x, y)$, $v_k(x, y)$ dem partiellen Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial u_k(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v_k(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_k(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v_k(x,y)}{\partial x} \tag{11}$$

genügt.

Wegen der Linearität und Homogenität von (1) ist zugleich mit dem zum Grade k gehörigen Funktionenpaar $u_k(x, y)$, $v_k(x, y)$ auch

$$a\,u_k(x,y), \quad a\,v_k(x,y) \tag{12}$$

ein Paar von Funktionen, welche Lösungen von (1) darstellen. Sind ferner $u_l(x, y)$, $v_l(x, y)$ und $u_m(x, y)$, $v_m(x, y)$ die zum Grade l und m gehörigen Funktionenpaare, so ist auch

$$u_l(x,y) + u_m(x,y), \quad v_l(x,y) + v_m(x,y) \tag{13}$$

ein Paar von Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung (1).

Die vorangehenden Entwicklungen lassen die Einführung eines Kalküls mit Zahlenpaaren als zweckmäßig erscheinen. Die Definition der Addition zweier Zahlenpaare wird durch (13), die der Multiplikation eines Zahlenpaares mit einer Zahl durch (12) und die des Produktes zweier Zahlenpaare durch (10) nahegelegt.

Wie ändern sich nun die Verhältnisse beim Übergang aus der (x, y)-Ebene in den (x, y, z)-Raum?

§ 1.

Aufstellung einer Basis für die harmonischen Polynome in drei Variabeln.

Bekanntlich besteht jede Basis für die harmonischen Polynome n-ten Grades $U_n(x, y, z)$ aus $2n + 1$ linear unabhängigen harmonischen Polynomen n-ten Grades in x, y und z. Die Anzahl der linear unabhängigen harmonischen Polynome n-ten Grades in drei Variablen ist also vom Grad n abhängig und nicht mehr wie bei den harmonischen Polynomen in zwei Veränderlichen konstant.

Zunächst wollen wir für die harmonischen Polynome n-ten Grades in drei Veränderlichen eine für unsere Zwecke geeignete Basis aufstellen.

Das allgemeinste homogene Polynom n-ten Grades in x, y und z kann man in der Gestalt

$$U_n(x,y,z) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\, a_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma \tag{14}$$

schreiben.

Für $n \geqq 2$ ergibt sich

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2}$$
$$= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n-2} \frac{(\alpha+\beta+\gamma+2)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} (a_{\alpha+2,\beta,\gamma} + a_{\alpha,\beta+2,\gamma} + a_{\alpha,\beta,\gamma+2})\, x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß $U_n(x, y, z)$ dann und nur dann der LAPLACEschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial z^2} = 0 \tag{15}$$

genügt, wenn

$$a_{\alpha+2,\beta,\gamma} + a_{\alpha,\beta+2,\gamma} + a_{\alpha,\beta,\gamma+2} = 0 \tag{16}$$

ist, wobei $\alpha + \beta + \gamma = n - 2$.

Bevor wir die gesuchte Basis für allgemeines n angeben, wollen wir deren Aufstellung an den Beispielen $n = 5$ und $n = 6$ erläutern.

a) Der Fall $n = 5$.

Damit ein homogenes Polynom fünften Grades in x, y und z der LAPLACEschen Differentialgleichung (15) genügt, müssen zwischen seinen Koeffizienten nach (16) folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} &a_{500} + a_{320} + a_{302} = 0 \\ (17\,\varkappa)\quad &a_{320} + a_{140} + a_{122} = 0 \\ &a_{302} + a_{122} + a_{104} = 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &a_{410} + a_{230} + a_{212} = 0 \\ (17\,\lambda)\quad &a_{230} + a_{050} + a_{032} = 0 \\ &a_{212} + a_{032} + a_{014} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_{401} + a_{221} + a_{203} = 0 \\ (17\,\mu)\quad &a_{221} + a_{041} + a_{023} = 0 \\ &a_{203} + a_{023} + a_{005} = 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad (17\,\nu)\quad a_{311} + a_{131} + a_{113} = 0.$$

Die vier Gleichungssysteme (17 $\varkappa$), (17 λ), (17 μ) und (17 ν) sind dadurch charakterisiert, daß zwei in einem Gleichungssystem auftretende Koeffizienten $a_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}$ und $a_{\alpha_2\beta_2\gamma_2}$ Indizes haben, für welche $\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_1 - \beta_2$ und $\gamma_1 - \gamma_2$ gerade Zahlen sind. Da keinem Paar der vier Koeffizienten a_{500}, a_{410}, a_{401} und a_{311} diese Eigenschaft zukommt, so tritt jeder Koeffizient $a_{\alpha\beta\gamma}$ in einem und nur einem der vier Gleichungssysteme auf.

Im Gleichungssystem (17 $\varkappa$) wählen wir $a_{500} = \varkappa_1$, $a_{320} = \varkappa_2$ und $a_{140} = \varkappa_3$ als willkürliche Koeffizienten. Dann wird $a_{302} = -\varkappa_1 - \varkappa_2$, $a_{122} = -\varkappa_2 - \varkappa_3$ und $a_{104} = \varkappa_1 + 2\varkappa_2 + \varkappa_3$. Wir erhalten so die drei harmonischen Polynome

$$\begin{aligned} t_1^{(5)}(x,y,z) &= x(x^4 - 10x^2z^2 + 5z^4), \\ t_2^{(5)}(x,y,z) &= 10x(x^2y^2 - x^2z^2 + z^4 - 3y^2z^2), \\ t_3^{(5)}(x,y,z) &= 5x(y^4 - 6y^2z^2 + z^4). \end{aligned} \tag{18 $\varkappa$}$$

Im Gleichungssystem (17 λ) wählen wir $a_{410} = \lambda_1$, $a_{230} = \lambda_2$ und $a_{050} = \lambda_3$ als willkürliche Koeffizienten. Dann wird $a_{212} = -\lambda_1 - \lambda_2$, $a_{032} = -\lambda_2 - \lambda_3$ und $a_{014} = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$. Wir erhalten so die drei harmonischen Polynome

$$\begin{aligned} u_1^{(5)}(x,y,z) &= 5y(z^4 - 6z^2x^2 + x^4), \\ u_2^{(5)}(x,y,z) &= 10y(x^2y^2 - y^2z^2 + z^4 - 3z^2x^2), \\ u_3^{(5)}(x,y,z) &= y(y^4 - 10y^2z^2 + 5z^4). \end{aligned} \tag{18 λ}$$

Im Gleichungssystem (17 μ) wählen wir $a_{401} = \mu_1$, $a_{221} = \mu_2$ und $a_{041} = \mu_3$ als willkürliche Koeffizienten. Dann wird $a_{203} = -\mu_1 - \mu_2$, $a_{023} = -\mu_2 - \mu_3$ und $a_{005} = \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3$. Wir erhalten so die drei harmonischen Polynome

$$(18\,\mu) \qquad \begin{aligned} w_1^{(5)}(x,y,z) &= z(z^4 - 10z^2x^2 + 5x^4), \\ w_2^{(5)}(x,y,z) &= 2z(z^4 - 5z^2x^2 - 5y^2z^2 + 15x^2y^2), \\ w_3^{(5)}(x,y,z) &= z(z^4 - 10z^2y^2 + 5y^4). \end{aligned}$$

Schließlich wählen wir in der Gleichung (17 ν) $a_{311} = \nu_1$ und $a_{131} = \nu_2$ als willkürliche Koeffizienten. Dann wird $a_{113} = -\nu_1 - \nu_2$. Hier erhalten wir die harmonischen Polynome

$$(18\,\nu) \qquad v_1^{(5)}(x,y,z) = 20xyz(x^2 - z^2), \quad v_2^{(5)}(x,y,z) = 20xyz(y^2 - z^2).$$

Die elf harmonischen Polynome fünften Grades (18 $\varkappa$), (18 λ), (18 μ) und (18 ν) sind voneinander linear unabhängig und bilden also eine Basis für die harmonischen Polynome fünften Grades in x, y und z.

Die Wahl der willkürlichen Koeffizienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ in den Gleichungssystemen (17 $\varkappa$), (17 λ), (17 μ) und (17 ν), sowie die dadurch bewirkte Festlegung der restlichen Koeffizienten, wird durch die Figuren 1 $\varkappa$, 1 λ, 1 μ und 1 ν in übersichtlicher Weise veranschaulicht. Um die Konstruktion derselben zu erklären, gehen wir von einem gleichseitigen Dreieck ABC aus (Fig. 1). Jedem Punkte P innerhalb oder auf der Berandung des Dreieckes ordnen wir drei Koordinaten k, l und m in folgender Weise zu: Durch P legen wir Parallele zu den Dreiecksseiten BC, CA und AB und bringen sie mit CA, AB und BC zum Schnitt. Wir erhalten so die Schnittpunkte P_1, P_2 und P_3. Auf jeder der Dreiecksseiten wählen wir die gleiche Längeneinheit. Dann haben die Strecken $\overline{CP_1}$, $\overline{AP_2}$ und $\overline{BP_3}$ bestimmte Längen, deren Maßzahlen wir mit k, l und m bezeichnen und die wir dem Punkte P als Koordinaten zuordnen wollen.

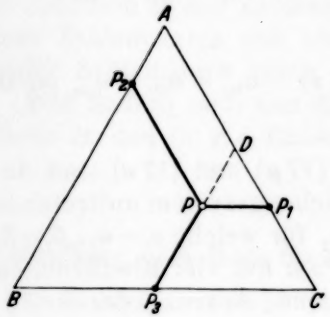

Fig. 1.

Aus Fig. 1 ist leicht zu entnehmen, daß

$$(19) \qquad \overline{AP_2} = \overline{DP_1},\ \overline{BP_3} = \overline{AD} \text{ und deshalb } \overline{CP_1} + \overline{AP_2} + \overline{BP_3} = \overline{AC}$$
$$\text{oder} \quad k + l + m = n$$

ist, wobei n die Maßzahl für die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC bedeutet.

Der Dreieckseckpunkt A hat demnach die Koordinaten $n, 0, 0$, B die Koordinaten $0, n, 0$ und C die Koordinaten $0, 0, n$.

In unserem Falle, wo es sich um die harmonischen Polynome fünften Grades handelt, wählen wir $n = 5$. Dem Koeffizienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ ordnen

wir als Bildpunkt in dem gleichseitigen Dreieck ABC denjenigen Punkt zu, welcher die Koordinaten α, β und γ hat.

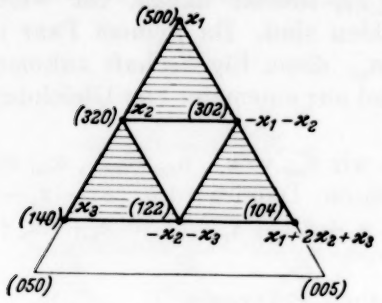

Fig. 1 $\varkappa$.

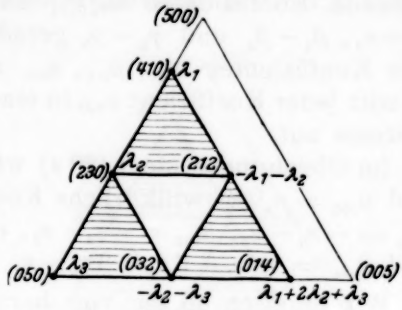

Fig. 1 λ.

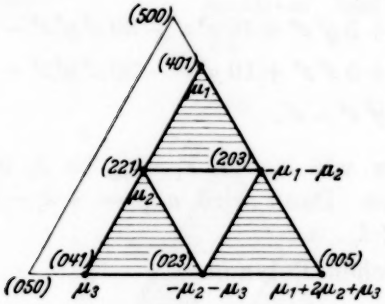

Fig. 1 μ.

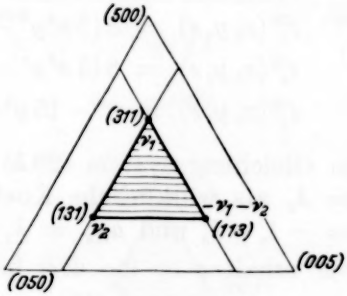

Fig. 1 ν.

Nach diesen Erläuterungen sind die den Gleichungssystemen (17 $\varkappa$), (17 λ), (17 μ) und (17 ν) entsprechenden Figuren 1 $\varkappa$, 1 λ, 1 μ und 1 ν unmittelbar verständlich.

b) Der Fall $n = 6$.

Damit ein homogenes Polynom sechsten Grades in x, y und z zugleich der Laplaceschen Differentialgleichung (15) genügt, müssen zwischen seinen Koeffizienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ nach (16) folgende Gleichungen bestehen:

$$(20\,\varkappa)\qquad \begin{aligned} a_{600}+a_{420}+a_{402} &= 0\\ a_{420}+a_{240}+a_{222} &= 0\\ a_{402}+a_{222}+a_{204} &= 0\\ a_{240}+a_{060}+a_{042} &= 0\\ a_{222}+a_{042}+a_{024} &= 0\\ a_{204}+a_{024}+a_{006} &= 0 \end{aligned}$$

$$(20\,\lambda)\qquad \begin{aligned} a_{510}+a_{330}+a_{312} &= 0\\ a_{330}+a_{150}+a_{132} &= 0\\ a_{312}+a_{132}+a_{114} &= 0 \end{aligned}$$

$$(20\,\mu)\qquad \begin{aligned} a_{501}+a_{321}+a_{303} &= 0\\ a_{321}+a_{141}+a_{123} &= 0\\ a_{303}+a_{123}+a_{105} &= 0 \end{aligned}$$

$$(20\,\nu)\qquad \begin{aligned} a_{411}+a_{231}+a_{213} &= 0\\ a_{231}+a_{051}+a_{033} &= 0\\ a_{213}+a_{033}+a_{015} &= 0. \end{aligned}$$

Die vier Gleichungssysteme (20 $\varkappa$), (20 λ), (20 μ) und (20 ν) sind wieder dadurch charakterisiert, daß zwei in einem Gleichungssystem auftretende Koeffizienten $a_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}$ und $a_{\alpha_2\beta_2\gamma_2}$ Indizes haben, für welche $\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_1-\beta_2$ und $\gamma_1-\gamma_2$ gerade Zahlen sind. Da keinem Paar der vier Koeffizienten a_{600}, a_{510}, a_{501} und a_{411} diese Eigenschaft zukommt, so tritt jeder Koeffizient $a_{\alpha\beta\gamma}$ in einem und nur einem der vier Gleichungssysteme auf.

Im Gleichungssystem (20 $\varkappa$) wählen wir $a_{600}=\varkappa_1$, $a_{420}=\varkappa_2$, $a_{240}=\varkappa_3$ und $a_{060}=\varkappa_4$ als willkürliche Koeffizienten. Dann wird $a_{402}=-\varkappa_1-\varkappa_2$, $a_{222}=-\varkappa_2-\varkappa_3$, $a_{042}=-\varkappa_3-\varkappa_4$, $a_{204}=\varkappa_1+2\varkappa_2+\varkappa_3$, $a_{024}=\varkappa_2+2\varkappa_3+\varkappa_4$ und $a_{006}=-\varkappa_1-3\varkappa_2-3\varkappa_3-\varkappa_4$.

Wir erhalten so die vier harmonischen Polynome

$$
\begin{aligned}
t_1^{(6)}(x,y,z) &= x^6-15x^4z^2+15x^2z^4-z^6\\
t_2^{(6)}(x,y,z) &= 3(5x^4y^2-5x^4z^2+5y^2z^4+10x^2z^4-30x^2y^2z^2-z^6)\\
t_3^{(6)}(x,y,z) &= 3(5x^2y^4-5y^4z^2+5x^2z^4+10y^2z^4-30x^2y^2z^2-z^6)\\
t_4^{(6)}(x,y,z) &= y^6-15y^4z^2+15y^2z^4-z^6.
\end{aligned}
\tag{21 $\varkappa$}
$$

Im Gleichungssystem (20 λ) wählen wir $a_{510}=\lambda_1$, $a_{330}=\lambda_2$ und $a_{150}=\lambda_3$ als willkürliche Koeffizienten. Dann wird $a_{312}=-\lambda_1-\lambda_2$, $a_{132}=-\lambda_2-\lambda_3$ und $a_{114}=\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3$.

Wir erhalten so die drei harmonischen Polynome

$$
\begin{aligned}
u_1^{(6)}(x,y,z) &= 6xy(x^4-10x^2z^2+5z^4)\\
u_2^{(6)}(x,y,z) &= 20xy(x^2y^2-3x^2z^2-3y^2z^2+3z^4)\\
u_3^{(6)}(x,y,z) &= 6xy(y^4-10y^2z^2+5z^4).
\end{aligned}
\tag{21 λ}
$$

Im Gleichungssystem (20 μ) wählen wir $a_{501}=\mu_1$, $a_{321}=\mu_2$ und $a_{141}=\mu_3$ als willkürliche Koeffizienten. Dann wird $a_{303}=-\mu_1-\mu_2$, $a_{123}=-\mu_2-\mu_3$ und $a_{105}=\mu_1+2\mu_2+\mu_3$.

Wir erhalten so die drei harmonischen Polynome

$$
\begin{aligned}
w_1^{(6)}(x,y,z) &= 2zx(3x^4-10x^2z^2+3z^4)\\
w_2^{(6)}(x,y,z) &= 4zx(3z^4-5x^2z^2+15x^2y^2-15y^2z^2)\\
w_3^{(6)}(x,y,z) &= 6zx(z^4-10y^2z^2+5y^4).
\end{aligned}
\tag{21 μ}
$$

Schließlich wählen wir im Gleichungssystem (20 ν) als willkürliche Koeffizienten $a_{411}=\nu_1$, $a_{231}=\nu_2$ und $a_{051}=\nu_3$. Dann wird $a_{213}=-\nu_1-\nu_2$, $a_{033}=-\nu_2-\nu_3$ und $a_{015}=\nu_1+2\nu_2+\nu_3$.

Wir erhalten so die drei harmonischen Polynome

$$
\begin{aligned}
v_1^{(6)}(x,y,z) &= 6yz(z^4-10z^2x^2+5x^4)\\
v_2^{(6)}(x,y,z) &= 4yz(3z^4-5y^2z^2+15x^2y^2-15x^2z^2)\\
v_3^{(6)}(x,y,z) &= 2yz(3y^4-10y^2z^2+3z^4).
\end{aligned}
\tag{21 ν}
$$

Die dreizehn harmonischen Polynome sechsten Grades $(21\,\varkappa)$, $(21\,\lambda)$, $(21\,\mu)$ und $(21\,\nu)$ sind voneinander linear unabhängig und bilden also eine Basis für die harmonischen Polynome sechsten Grades in x, y und z.

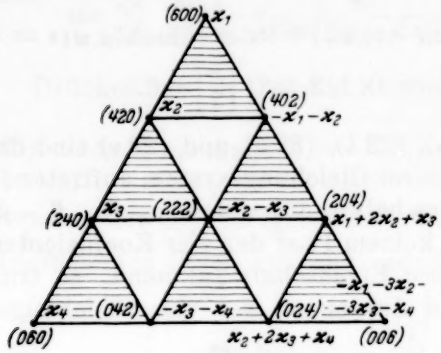

Fig. 2 $\varkappa$.

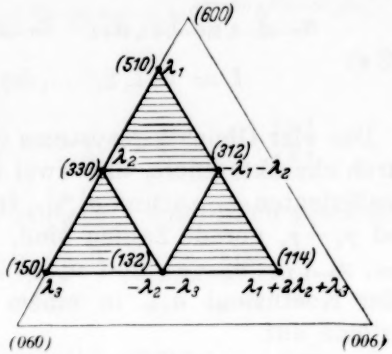

Fig. 2 λ.

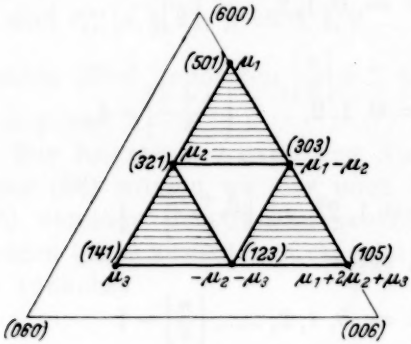

Fig. 2 μ.

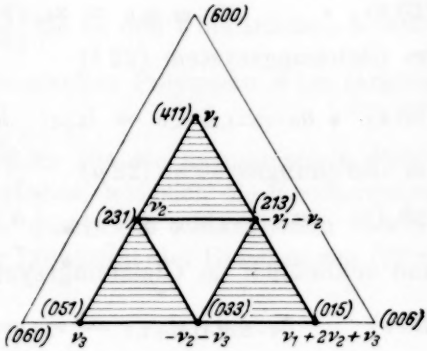

Fig. 2 ν.

Die Figuren $2\,\varkappa$, $2\,\lambda$, $2\,\mu$ und $2\,\nu$, welche den Figuren $1\,\varkappa$, $1\,\lambda$, $1\,\mu$ und $1\,\nu$ im Falle $n = 6$ entsprechen, veranschaulichen wieder in übersichtlicher Weise die Wahl der willkürlichen Koeffizienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ in den Gleichungssystemen $(20\,\varkappa)$, $(20\,\lambda)$, $(20\,\mu)$ und $(20\,\nu)$ und die dadurch bewirkte Festlegung der restlichen Koeffizienten.

c) Der allgemeine Fall.

Damit das homogene Polynom n-ten Grades in x, y und z (14) zugleich der Laplaceschen Differentialgleichung (15) genügt, müssen zwischen seinen Koeffizienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ nach (16) folgende Gleichungen gelten:

$$(22\,\varkappa)\qquad \begin{gathered} a_{n-2k,\,2(k-l),\,2l} + a_{n-2(k+1),\,2(k+1-l),\,2l} + a_{n-2(k+1),\,2(k-l),\,2(l+1)} = 0 \\ l = 0, 1, 2, \ldots, k; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1, \end{gathered}$$

$$(22\,\lambda)\qquad \begin{gathered} a_{n-2k-1,\,2(k-l)+1,\,2l} + a_{n-2k-3,\,2(k-l)+3,\,2l} + a_{n-2k-3,\,2(k-l)+1,\,2(l+1)} = 0 \\ l = 0, 1, 2, \ldots, k; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2, \end{gathered}$$

$$a_{n-2k-1,\,2(k-l),\,2l+1} + a_{n-2k-3,\,2(k+1-l)\,2l+1} + a_{n-2k-3,\,2(k-l),\,2l+3} = 0$$

$$(22\,\mu) \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, k; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2$$

und

$$a_{n-2k-2,\,2(k-l)+1,\,2l+1} + a_{n-2k-4,\,2(k-l)+3,\,2l+1} + a_{n-2k-4,\,2(k-l)+1,\,2l+3} = 0$$

$$(22\,\nu) \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, k; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] - 2.$$

Die vier Gleichungssysteme (22 $\varkappa$), (22 λ), (22 μ) und (22 ν) sind dadurch charakterisiert, daß zwei in einem Gleichungssystem auftretende Koeffizienten $a_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}$ und $a_{\alpha_2\beta_2\gamma_2}$ Indizes haben, für welche $\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_1 - \beta_2$ und $\gamma_1 - \gamma_2$ gerade Zahlen sind. Da keinem Paar der vier Koeffizienten a_{n00}, $a_{n-1,1,0}$, $a_{n-1,0,1}$ und $a_{n-2,1,1}$ diese Eigenschaft zukommt, so tritt jeder Koeffizient $a_{\alpha\beta\gamma}$ in einem und nur einem der vier Gleichungssysteme auf.

Im Gleichungssystem (22 $\varkappa$) wählen wir

$$(23\,\varkappa) \qquad a_{n-2k,\,2k,\,0} = \varkappa_{k+1}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

im Gleichungssystem (22 λ)

$$(23\,\lambda) \qquad a_{n-2k-1,\,2k+1,\,0} = \lambda_{k+1}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1,$$

im Gleichungssystem (22 μ)

$$(23\,\mu) \qquad a_{n-2k-1,\,2k,\,1} = \mu_{k+1}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1,$$

und schließlich im Gleichungssystem (22 ν)

$$(23\,\nu) \qquad a_{n-2(k+1),\,2k+1,\,1} = \nu_{k+1}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1$$

als willkürliche Koeffizienten. Durch die $2n+1$ willkürlich gewählten Koeffizienten (23 $\varkappa$), (23 λ), (23 μ) und (23 ν) sind die restlichen in den Gleichungen (22 $\varkappa$), (22 λ), (22 μ) und (22 ν) auftretenden Koeffizienten eindeutig bestimmt.

Um nun die zu den $2n+1$ willkürlich gewählten Koeffizienten (23 $\varkappa$), (23 λ), (23 μ) und (23 ν) gehörigen $2n+1$ harmonischen Polynome zu erhalten, spalten wir das homogene Polynom n-ten Grades (14) in die vier Summanden

$$U_n(x, y, z) = U_n^{(\varkappa)}(x, y, z) + U_n^{(\lambda)}(x, y, z) + U_n^{(\mu)}(x, y, z) + U_n^{(\nu)}(x, y, z)$$

auf, wobei in $U_n^{(\varkappa)}(x, y, z)$ nur die im Gleichungssystem (22 $\varkappa$) vorkommenden Koeffizienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ auftreten sollen. Analog sind die homogenen Polynome n-ten Grades $U_n^{(\lambda)}(x, y, z)$, $U_n^{(\mu)}(x, y, z)$ und $U_n^{(\nu)}(x, y, z)$ erklärt.

Da die Koeffizienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ des Gleichungssystems (22 $\varkappa$) durch $a_{n-2\varrho,\,2(\varrho-\sigma),\,2\sigma}$ mit $\sigma = 0, 1, 2, \ldots, \varrho$ und $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ gegeben

sind, hat $U_n^{(\varkappa)}(x, y, z)$ die Gestalt

$$U_n^{(\varkappa)}(x, y, z)$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{\sigma=0}^{\varrho} \frac{n!}{(n-2\varrho)!\,(2\varrho-2\sigma)!\,(2\sigma)!}\, a_{n-2\varrho,\,2(\varrho-\sigma),\,2\sigma}\, x^{n-2\varrho}\, y^{2(\varrho-\sigma)}\, z^{2\sigma}. \tag{24}$$

Drücken wir in (24) die Koeffizienten

$$a_{n-2\varrho,\,2(\varrho-\sigma),\,2\sigma};\quad \sigma = 1, 2, \ldots, \varrho \text{ und } \varrho = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] \tag{25}$$

vermöge der Gleichungen (22 $\varkappa$) durch die $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ willkürlich gewählten Koeffizienten (23 $\varkappa$) aus und ordnen wir nach diesen, also

$$U_n^{(\varkappa)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} t_{k+1}^{(n)}(x, y, z)\, a_{n-2k,\,2k,\,0}, \tag{26}$$

so sind $t_{k+1}^{(n)}(x, y, z)$; $k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ die zu den willkürlichen Koeffizienten (23 $\varkappa$) gehörigen $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ harmonischen Polynome n-ten Grades in x, y und z.

Zur Angabe der expliziten Ausdrücke für die harmonischen Polynome (26) müssen wir uns noch überlegen, wie sich die Koeffizienten (25) vermöge der Gleichungen (22 $\varkappa$) durch die willkürlichen Koeffizienten (23 $\varkappa$) ausdrücken. Wegen der Linearität der Gleichungen (23 $\varkappa$) ist zunächst

$$a_{n-2\varrho,\,2(\varrho-\sigma),\,2\sigma} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha_{\varrho\sigma}^{(k)}\, a_{n-2k,\,2k,\,0}, \tag{27}$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots, \varrho;\quad \varrho = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

Zur Bestimmung der Zahlenkoeffizienten $\alpha_{\varrho\sigma}^{(k)}$ in (27) ziehen wir die zu Fig. 1 $\varkappa$ bzw. 2 $\varkappa$ analoge Figur für allgemeines n heran und lesen an Hand der Figur ab, in welcher Weise jeder der willkürlichen Koeffizienten (23 $\varkappa$) in den nicht willkürlichen Koeffizienten (25) auftritt. $\varkappa$ sei einer der Koeffizienten (23 $\varkappa$). Da nach (16) die Summe der Koeffizienten, welche den Eckpunkten eines jeden der schraffierten Dreiecke entsprechen, gleich Null sein muß, ergibt sich für den Einfluß von $\varkappa$ auf die anderen Koeffizienten das in Fig. 3 veranschaulichte Verhältnis. Insbesondere hat $\varkappa$ in der h-ten Zeile und i-ten Spalte den Zahlenfaktor

$$(-1)^{h+i} \frac{(h+i-2)!}{(h-1)!\,(i-1)!}, \tag{28}$$

was sich leicht durch vollständige Induktion beweisen läßt.

Ist nun $\varkappa = a_{\alpha\beta\gamma}$, so hat der in der h-ten Zeile und i-ten Spalte stehende Koeffizient $a_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}$ die Indizes

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - 2(i-1), \quad \beta_1 = \beta - 2(h-1) \text{ und} \\ \gamma_1 &= \gamma + 2(h-1) + 2(i-1). \end{aligned} \tag{29}$$

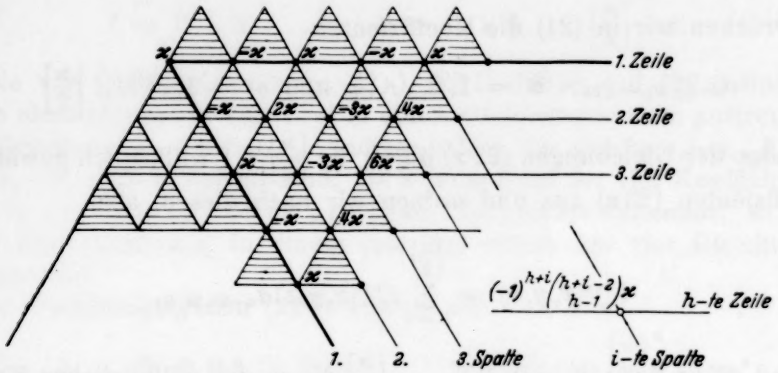

Fig. 3.

$a_{n-2k,2k,0}$ tritt also nur dann in $a_{n-2\varrho,2(\varrho-\sigma),2\sigma}$ auf, wenn

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_1 &= 2(i-1) = 2(\varrho - k) \geqq 0 \text{ und} \\ \beta - \beta_1 &= 2(h-1) = 2(k - \varrho + \sigma) \geqq 0 \end{aligned} \tag{30}$$

ist. Mithin ist

$$\alpha_{\varrho\sigma}^{(k)} = 0, \text{ wenn } k > \varrho \text{ oder } k < \varrho - \sigma \tag{31}$$

ist. (27) vereinfacht sich infolgedessen zu

$$a_{n-2\varrho,2(\varrho-\sigma),2\sigma} = \sum_{k=\varrho-\sigma}^{\varrho} \alpha_{\varrho\sigma}^{(k)} a_{n-2k,2k,0}. \tag{32}$$

Weil $a_{n-2\varrho,2(\varrho-\sigma),2\sigma}$ in bezug auf $a_{n-2k,2k,0}$ nach (30) in der $(k-\varrho+\sigma+1)$-ten Zeile und $(\varrho-k+1)$-ten Spalte steht, wird wegen (28) für $\varrho - \sigma \leqq k \leqq \varrho$

$$\alpha_{\varrho\sigma}^{(k)} = (-1)^{\sigma} \frac{\sigma!}{(\varrho-k)!\,(k-\varrho+\sigma)!} \tag{33}$$

und deshalb geht (31) schließlich in

$$a_{n-2\varrho,2(\varrho-\sigma),2\sigma} = \sum_{k=\varrho-\sigma}^{\varrho} (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho-k} a_{n-2k,2k,0} \tag{34}$$

über.

Setzen wir den so erhaltenen Ausdruck für $a_{n-2\varrho,2(\varrho-\sigma),2\sigma}$ in (24) ein und suchen wir aus den Koeffizienten von $a_{n-2k,2k,0}$ auf, so bekommen wir nach (26)

$$t_{k+1}^{(n)}(x,y,z) = \sum_{\varrho=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho} (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho-k} \binom{n}{2\varrho} \binom{2\varrho}{2\sigma} x^{n-2\varrho} y^{2(\varrho-\sigma)} z^{2\sigma} \tag{35 $\varkappa$}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

Die Grenzen für die Summationsindizes ϱ und σ ergeben sich sofort, wenn man beachtet, daß nach (25) $1 \leqq \sigma \leqq \varrho$, $1 \leqq \varrho \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ und nach (31) $\varrho \geqq k$, $\sigma \geqq \varrho - k$ sein muß.

Durch ähnliche Betrachtungen erhalten wir für die zu den $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ willkürlichen Koeffizienten $(23\,\lambda)$ gehörigen harmonischen Polynome die Ausdrücke

$$u_{k+1}^{(n)}(x,y,z)$$

$$(35\,\lambda) \quad = \sum_{\varrho=k}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} \sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho} (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho-k} \binom{n}{2\varrho+1} \binom{2\varrho+1}{2\sigma} x^{n-2\varrho-1} y^{2(\varrho-\sigma)+1} z^{2\sigma},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]-1,$$

ferner für die zu den $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ willkürlichen Koeffizienten $(23\,\mu)$ gehörigen harmonischen Polynome

$$w_{k+1}^{(n)}(x,y,z)$$

$$(35\,\mu) \quad = \sum_{\varrho=k}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} \sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho} (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho-k} \binom{n}{2\varrho+1} \binom{2\varrho+1}{2\sigma+1} x^{n-2\varrho-1} y^{2(\varrho-\sigma)} z^{2\sigma+1}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]-1$$

und schließlich für die zu den $\left[\frac{n}{2}\right]$ willkürlichen Koeffizienten $(23\,\nu)$ gehörigen harmonischen Polynome

$$v_{k+1}^{(n)}(x,y,z)$$

$$(35\,\nu) \quad = \sum_{\varrho=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho} (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho-k} \binom{n}{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{2\sigma+1} x^{n-2\varrho-2} y^{2(\varrho-\sigma)+1} z^{2\sigma+1}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]-1.$$

Wie aus der Herleitung leicht zu ersehen ist, sind die $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ $+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right] = 2n+1$ harmonischen Polynome n-ten Grades $(35\,\varkappa)$, $(35\,\lambda)$, $(35\,\mu)$ und $(35\,\nu)$ voneinander linear unabhängig und bilden mithin eine Basis für die Gesamtheit der harmonischen Polynome n-ten Grades in x, y und z. Diese Basis wollen wir im Folgenden als die (t, u, v, w)-Basis für den Grad n bezeichnen.

Wir heben noch die (t, u, v, w)-Basis für $n = 1$ ausdrücklich hervor. Es ist

$$(36) \quad t_1^{(1)}(x,y,z) = x, \quad u_1^{(1)}(x,y,z) = y \quad \text{und} \quad w_1^{(1)}(x,y,z) = z.$$

Ist nun $\varkappa = a_{\alpha\beta\gamma}$, so hat der in der h-ten Zeile und i-ten Spalte stehende Koeffizient $a_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}$ die Indizes

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - 2(i-1), \quad \beta_1 = \beta - 2(h-1) \text{ und} \\ \gamma_1 &= \gamma + 2(h-1) + 2(i-1). \end{aligned} \tag{29}$$

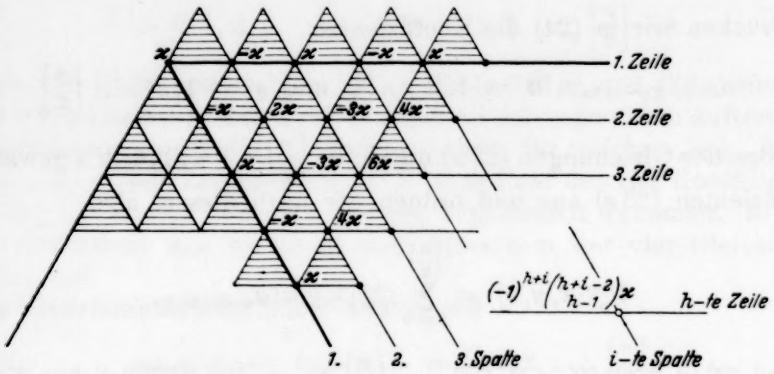

Fig. 3.

$a_{n-2k,\,2k,\,0}$ tritt also nur dann in $a_{n-2\varrho,\,2(\varrho-\sigma),\,2\sigma}$ auf, wenn

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_1 &= 2(i-1) = 2(\varrho - k) \geqq 0 \text{ und} \\ \beta - \beta_1 &= 2(h-1) = 2(k - \varrho + \sigma) \geqq 0 \end{aligned} \tag{30}$$

ist. Mithin ist

$$\alpha_{\varrho\sigma}^{(k)} = 0, \text{ wenn } k > \varrho \text{ oder } k < \varrho - \sigma \tag{31}$$

ist. (27) vereinfacht sich infolgedessen zu

$$a_{n-2\varrho,\,2(\varrho-\sigma),\,2\sigma} = \sum_{k=\varrho-\sigma}^{\varrho} \alpha_{\varrho\sigma}^{(k)}\, a_{n-2k,\,2k,\,0}\,. \tag{32}$$

Weil $a_{n-2\varrho,\,2(\varrho-\sigma),\,2\sigma}$ in bezug auf $a_{n-2k,\,2k,\,0}$ nach (30) in der $(k-\varrho+\sigma+1)$-ten Zeile und $(\varrho-k+1)$-ten Spalte steht, wird wegen (28) für $\varrho - \sigma \leqq k \leqq \varrho$

$$\alpha_{\varrho\sigma}^{(k)} = (-1)^{\sigma} \frac{\sigma!}{(\varrho-k)!\,(k-\varrho+\sigma)!} \tag{33}$$

und deshalb geht (31) schließlich in

$$a_{n-2\varrho,\,2(\varrho-\sigma),\,2\sigma} = \sum_{k=\varrho-\sigma}^{\varrho} (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho-k}\, a_{n-2k,\,2k,\,0} \tag{34}$$

über.

Setzen wir den so erhaltenen Ausdruck für $a_{n-2\varrho,\,2(\varrho-\sigma),\,2\sigma}$ in (24) ein und suchen wir aus den Koeffizienten von $a_{n-2k,\,2k,\,0}$ auf, so bekommen wir nach (26)

$$t_{k+1}^{(n)}(x,y,z) = \sum_{\varrho=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho} (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho-k} \binom{n}{2\varrho} \binom{2\varrho}{2\sigma} x^{n-2\varrho}\, y^{2(\varrho-\sigma)}\, z^{2\sigma} \tag{35 $\varkappa$}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

Die Grenzen für die Summationsindizes ϱ und σ ergeben sich sofort, wenn man beachtet, daß nach (25) $1 \leqq \sigma \leqq \varrho$, $1 \leqq \varrho \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ und nach (31) $\varrho \geqq k$, $\sigma \geqq \varrho - k$ sein muß.

Durch ähnliche Betrachtungen erhalten wir für die zu den $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ willkürlichen Koeffizienten $(23\,\lambda)$ gehörigen harmonischen Polynome die Ausdrücke

$$u_{k+1}^{(n)}(x,y,z)$$

$$(35\,\lambda) \quad = \sum_{\varrho=k}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} \sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho} (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho-k} \binom{n}{2\varrho+1} \binom{2\varrho+1}{2\sigma} x^{n-2\varrho-1} y^{2(\varrho-\sigma)+1} z^{2\sigma},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]-1,$$

ferner für die zu den $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ willkürlichen Koeffizienten $(23\,\mu)$ gehörigen harmonischen Polynome

$$w_{k+1}^{(n)}(x,y,z)$$

$$(35\,\mu) \quad = \sum_{\varrho=k}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} \sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho} (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho-k} \binom{n}{2\varrho+1} \binom{2\varrho+1}{2\sigma+1} x^{n-2\varrho-1} y^{2(\varrho-\sigma)} z^{2\sigma+1}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]-1$$

und schließlich für die zu den $\left[\frac{n}{2}\right]$ willkürlichen Koeffizienten $(23\,\nu)$ gehörigen harmonischen Polynome

$$v_{k+1}^{(n)}(x,y,z)$$

$$(35\,\nu) \quad = \sum_{\varrho=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho} (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho-k} \binom{n}{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{2\sigma+1} x^{n-2\varrho-2} y^{2(\varrho-\sigma)+1} z^{2\sigma+1}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]-1.$$

Wie aus der Herleitung leicht zu ersehen ist, sind die $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ $+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right] = 2n+1$ harmonischen Polynome n-ten Grades $(35\,\varkappa)$, $(35\,\lambda)$, $(35\,\mu)$ und $(35\,\nu)$ voneinander linear unabhängig und bilden mithin eine Basis für die Gesamtheit der harmonischen Polynome n-ten Grades in x, y und z. Diese Basis wollen wir im Folgenden als die (t, u, v, w)-Basis für den Grad n bezeichnen.

Wir heben noch die (t, u, v, w)-Basis für $n = 1$ ausdrücklich hervor. Es ist

$$(36) \quad t_1^{(1)}(x,y,z) = x, \quad u_1^{(1)}(x,y,z) = y \quad \text{und} \quad w_1^{(1)}(x,y,z) = z.$$

§ 2.

Berechnung der (t, u, v, w)-Basis für den Grad $m+n$ aus den (t, u, v, w)-Basen für die Grade m und n.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall $m = 1$, in welchem also die (t, u, v, w)-Basis für den Grad $n+1$ aus den (t, u, v, w)-Basen für den Grad n und den Grad 1 zu berechnen ist.

Da jedes der harmonischen Polynome $(n+1)$-ten Grades $h_{n+1}^{(l)}(x, y, z)$; $l = 1, 2, \ldots, 2n+3$, aus denen die (t, u, v, w)-Basis für den Grad $n+1$ besteht, zugleich homogene Funktionen $(n+1)$-ten Grades in x, y und z sind, so ergibt sich nach dem Satze von EULER über homogene Funktionen

$$(37) \qquad (n+1)\, h_{n+1}^{(l)}(x, y, z) = x \frac{\partial h_{n+1}^{(l)}}{\partial x} + y \frac{\partial h_{n+1}^{(l)}}{\partial y} + z \frac{\partial h_{n+1}^{(l)}}{\partial z}.$$

Nun lassen sich die partiellen Ableitungen von $h_{n+1}^{(l)}(x, y, z)$ nach x, y und z in einfacher Weise durch die $2n+1$ harmonischen Polynome $h_n^{(l)}(x, y, z)$ der (t, u, v, w)-Basis für den Grad n ausdrücken. Wir bringen diesen Zusammenhang in den beiden Tabellen 1 und 2 zur Darstellung. Diese sind so angelegt, daß in der ersten Spalte, an deren unterem Ende $\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}$ steht, die partiellen Ableitungen der die (t, u, v, w)-Basis bildenden harmonischen Polynome nach x eingetragen sind. In der zweiten Spalte befinden sich deren partielle Ableitungen nach y und in der dritten Spalte die nach z.

$t_1^{(1)}$	$u_1^{(1)}$	$w_1^{(1)}$
$t_1^{(n+1)}$	$t_1^{(n)}$	0	$-w_1^{(n)}$
$t_\varkappa^{(n+1)}$	$t_\varkappa^{(n)}$	$u_{\varkappa-1}^{(n)}$	$-w_\varkappa^{(n)} - w_{\varkappa-1}^{(n)}$
$t_{n_1+1}^{(n+1)}$	$t_{n_1+1}^{(n)}$	$u_{n_1}^{(n)}$	$-w_{n_1}^{(n)}$
$u_1^{(n+1)}$	$u_1^{(n)}$	$t_1^{(n)}$	$-v_1^{(n)}$
$u_\lambda^{(n+1)}$	$u_\lambda^{(n)}$	$t_\lambda^{(n)}$	$-v_\lambda^{(n)} - v_{\lambda-1}^{(n)}$
$u_{n_1+1}^{(n+1)}$	0	$t_{n_1+1}^{(n)}$	$-v_{n_1}^{(n)}$
$v_\mu^{(n+1)}$	$v_\mu^{(n)}$	$w_\mu^{(n)}$	$u_\mu^{(n)}$
$w_1^{(n+1)}$	$w_1^{(n)}$	0	$t_1^{(n)}$
$w_\nu^{(n+1)}$	$w_\nu^{(n)}$	$v_{\nu-1}^{(n)}$	$t_\nu^{(n)}$
$w_{n_1+1}^{(n+1)}$	0	$v_{n_1}^{(n)}$	$t_{n_1+1}^{(n)}$
	$\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial z}$

Tabelle 1.

$n = 2n_1$:

$2 \leqq \varkappa \leqq n_1,\ 2 \leqq \lambda \leqq n_1,$

$1 \leqq \mu \leqq n_1,\ 2 \leqq \nu \leqq n_1,$

Von der Richtigkeit der beiden Tabellen 1 und 2 kann man sich leicht an Hand der allgemeinen Ausdrücke (35) für die zum Grad $n+1$

gehörige (t, u, v, w)-Basis überzeugen. Nur die Behauptung über die partiellen Ableitungen der $t_{\varkappa}^{(n+1)}$- und $u_{\lambda}^{(n+1)}$-Polynome läßt sich nicht

	$t_1^{(1)}$	$u_1^{(1)}$	$w_1^{(1)}$
$t_1^{(n+1)}$	$t_1^{(n)}$	0	$-w_1^{(n)}$
$t_{\varkappa}^{(n+1)}$	$t_{\varkappa}^{(n)}$	$u_{\varkappa-1}^{(n)}$	$-w_{\varkappa}^{(n)}-w_{\varkappa-1}^{(n)}$
$t_{n_1+1}^{(n+1)}$	0	$u_{n_1}^{(n)}$	$w_{n_1}^{(n)}$
$u_1^{(n+1)}$	$u_1^{(n)}$	$t_1^{(n)}$	$-v_1^{(n)}$
$u_{\lambda}^{(n+1)}$	$u_{\lambda}^{(n)}$	$t_{\lambda}^{(n)}$	$-v_{\lambda}^{(n)}-v_{\lambda-1}^{(n)}$
$u_{n_1}^{(n+1)}$	$u_{n_1}^{(n)}$	$t_{n_1}^{(n)}$	$-v_{n_1}^{(n)}$
$v_{\mu}^{(n+1)}$	$v_{\mu}^{(n)}$	$w_{\mu}^{(n)}$	$u_{\mu}^{(n)}$
$v_{n_1}^{(n+1)}$	0	$w_{n_1}^{(n)}$	$u_{n_1}^{(n)}$
$w_1^{(n+1)}$	$w_1^{(n)}$	0	$t_1^{(n)}$
$w_{\nu}^{(n+1)}$	$w_{\nu}^{(n)}$	$v_{\nu-1}^{(n)}$	$t_{\nu}^{(n)}$
	$\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial z}$

Tabelle 2.

$n = 2n_1 - 1;$
$2 \leqq \varkappa \leqq n_1,$
$2 \leqq \lambda \leqq n_1 - 1,$
$1 \leqq \mu \leqq n_1 - 1,$
$2 \leqq \nu \leqq n_1.$

so unmittelbar verifizieren und deshalb wollen wir

$$\frac{\partial\, t_{k+1}^{(n+1)}(x,y,z)}{\partial z} = -(n+1)\,(w_{k+1}^{(n)}(x,y,z) + w_k^{(n)}(x,y,z)), \tag{38}$$
$$1 \leqq k \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1,\quad n \geqq 3$$

ausführlich beweisen.

Nach (35 $\varkappa$) ist

$$t_{k+1}^{(n+1)}(x,y,z) = \sum_{\varrho=k}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho} (-1)^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho-k} \binom{n+1}{2\varrho} \binom{2\varrho}{2\sigma} x^{n+1-2\varrho}\, y^{2(\varrho-\sigma)}\, z^{2\sigma}. \tag{39}$$

Da das Glied, welches $\varrho = k$ und $\sigma = 0$ entspricht, von z unabhängig ist, so kommt für die partielle Differentiation nach z von der in (39) auftretenden Doppelsumme nur

$$\sum_{\varrho=k+1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \sum_{\sigma=\varrho-k+1}^{\varrho} + \sum_{\varrho=k}^{k} \sum_{\sigma=\varrho-k+1}^{\varrho} + \sum_{\varrho=k+1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho-k}$$

in Betracht.

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(-1)^{\sigma}\binom{\sigma}{\varrho-k}\binom{n+1}{2\varrho}\binom{2\varrho}{2\sigma} x^{n+1-2\varrho}\, y^{2(\varrho-\sigma)}\, z^{2\sigma}\right]$$
$$= (n+1)(-1)^{\sigma}\binom{\sigma}{\varrho-k}\binom{n}{2\varrho-1}\binom{2\varrho-1}{2\sigma-1} x^{n-(2\varrho-1)}\, y^{2(\varrho-\sigma)}\, z^{2\sigma-1}.$$

Da $\binom{\sigma}{\varrho-k} = \binom{\sigma-1}{\varrho-k} + \binom{\sigma-1}{\varrho-k-1}$, wenn $\varrho \geqq k+1$ und $\sigma \geqq \varrho-k+1$, ferner $\binom{\sigma}{\varrho-k} = \binom{\sigma-1}{\varrho-k}$, wenn $\varrho = k$ und $\sigma \geqq \varrho-k+1$ und $\binom{\sigma}{\varrho-k} = \binom{\varrho-1}{\varrho-k-1}$, wenn $\varrho \geqq k+1$ und $\sigma = \varrho-k$ ist, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{\varrho=k+1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\sum_{\sigma=\varrho-k+1}^{\varrho} + \sum_{\varrho=k}^{k}\sum_{\sigma=\varrho-k+1}^{\varrho} + \sum_{\varrho=k+1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho-k}\right)$$

$$= (n+1)\left(\sum_{\varrho=k+1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\sum_{\sigma=\varrho-k}^{\varrho}(-1)^{\sigma}\binom{\sigma-1}{\varrho-k-1}\binom{n}{2\varrho-1}\binom{2\varrho-1}{2\sigma-1}x^{n-(2\varrho-1)}y^{2(\varrho-\sigma)}z^{2\sigma-1}\right.$$

$$\left. + \sum_{\varrho=k}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\sum_{\sigma=\varrho-k+1}^{\varrho}(-1)^{\sigma}\binom{\sigma-1}{\varrho-k}\binom{n}{2\varrho-1}\binom{2\varrho-1}{2\sigma-1}x^{n-(2\varrho-1)}y^{2(\varrho-\sigma)}z^{2\sigma-1}\right).$$

Führt man in beide Doppelsummen die neuen Summationsindizes $\sigma = \sigma'+1$ und $\varrho = \varrho'+1$ ein, so erhalten wir schließlich

$$\frac{\partial t_{\varkappa+1}^{(n+1)}(x,y,z)}{\partial z} = -(n+1)\left(\sum_{\varrho'=k}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}\sum_{\sigma'=\varrho'-k}^{\varrho'}(-1)^{\sigma'}\binom{\sigma'}{\varrho'-k}\binom{n}{2\varrho'+1}\binom{2\varrho'+1}{2\sigma'+1}\right.$$

$$\times x^{n-2\varrho'-1}y^{(2\varrho'-\sigma')}z^{2\sigma'+1}$$

$$\left. + \sum_{\varrho'=k-1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}\sum_{\sigma'=\varrho'-k+1}^{\varrho'}(-1)^{\sigma'}\binom{\sigma'}{\varrho'-k+1}\binom{n}{2\varrho'+1}\binom{2\varrho'+1}{2\sigma'+1}x^{n-2\varrho'-1}y^{2(\varrho'-\sigma')}z^{2\sigma'+1}\right),$$

was nach (35 μ) mit (38) gleichbedeutend ist.

Auf dieselbe Weise läßt sich auch die Behauptung über die partiellen Ableitungen der $u_{\lambda}^{(n+1)}$-Polynome nach z beweisen.

Wenn man beachtet, daß (37) wegen (36) auch in der Gestalt

$$(40)\qquad h_{n+1}^{(l)} = \frac{1}{n+1}\frac{\partial h_{n+1}^{(l)}}{\partial x}t_1^{(1)} + \frac{1}{n+1}\frac{\partial h_{n+1}^{(l)}}{\partial y}u_1^{(1)} + \frac{1}{n+1}\frac{\partial h_{n+1}^{(l)}}{\partial z}w_1^{(1)}$$

geschrieben werden kann, so läßt sich mit Hilfe der beiden Tabellen 1 und 2 auch die Frage nach dem Zusammenhang beantworten, welcher zwischen der (t,u,v,w)-Basis für den Grad $n+1$ einerseits und den zu den Graden n und 1 gehörigen (t,u,v,w)-Basen andererseits besteht. Man erhält folgendes Ergebnis: Es ist

$$(41)\qquad \begin{aligned} t_{\varkappa}^{(n+1)} &= T_{\varkappa}^{(n)}t_1^{(1)} + U_{\varkappa-1}^{(n)}u_1^{(1)} - (W_{\varkappa}^{(n)} + W_{\varkappa-1}^{(n)})w_1^{(1)},\\ u_{\lambda}^{(n+1)} &= U_{\lambda}^{(n)}t_1^{(1)} + T_{\lambda}^{(n)}u_1^{(1)} - (V_{\lambda}^{(n)} + V_{\lambda-1}^{(n)})w_1^{(1)},\\ w_{\nu}^{(n+1)} &= W_{\nu}^{(n)}t_1^{(1)} + V_{\nu-1}^{(n)}u_1^{(1)} + T_{\nu}^{(n)}w_1^{(1)} \text{ und}\\ v_{\mu}^{(n+1)} &= V_{\mu}^{(n)}t_1^{(1)} + W_{\mu}^{(n)}u_1^{(1)} + U_{\mu}^{(n)}w_1^{(1)}, \end{aligned}$$

wobei

$$1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]+1, \quad 1 \leqq \lambda, \quad \nu \leqq \left[\frac{n+2}{2}\right], \quad 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

und

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha}^{(n)} &= \begin{cases} t_{\alpha}^{(n)}, & \text{wenn } 1 \leqq \alpha \leqq \left[\frac{n}{2}\right]+1, \\ 0 \text{ für alle übrigen } \alpha, \end{cases} \\
U_{\beta}^{(n)} &= \begin{cases} u_{\beta}^{(n)}, & \text{wenn } 1 \leqq \beta \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right], \\ 0 \text{ für alle übrigen } \beta, \end{cases} \\
V_{\gamma}^{(n)} &= \begin{cases} v_{\gamma}^{(n)}, & \text{wenn } 1 \leqq \gamma \leqq \left[\frac{n}{2}\right], \\ 0 \text{ für alle übrigen } \gamma, \end{cases} \\
W_{\delta}^{(n)} &= \begin{cases} w_{\delta}^{(n)}, & \text{wenn } 1 \leqq \delta \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right], \\ 0 \text{ für alle übrigen } \delta. \end{cases}
\end{aligned} \tag{42}
$$

Wir wenden uns nun dem allgemeinen Falle zu und fragen danach, wie sich die (t, u, v, w)-Basis für den Grad $m+n$ aus den (t, u, v, w)-Basen für den Grad m und den Grad n berechnen läßt. Es zeigt sich, daß jede Komponente der (t, u, v, w)-Basis für den Grad $m+n$ eine Linearform der Komponenten der $(t^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)})$-Basis ist, deren Koeffizienten harmonische Polynome m-ten Grades in x, y und z sind und die sich daher als lineare Kombinationen der Komponenten der $(t^{(m)}, u^{(m)}, v^{(m)}, w^{(m)})$-Basis mit konstanten Koeffizienten darstellen lassen. Der Zusammenhang zwischen der (t, u, v, w)-Basis für den Grad $m+n$ einerseits und den (t, u, v, w)-Basen für die Grade m und n andererseits, wird durch die folgenden Formeln ausgedrückt

$$
\begin{aligned}
t_{\varkappa}^{(m+n)} &= \sum_{\alpha} T_{\varkappa-\alpha+1}^{(m)} t_{\alpha}^{(n)} + \sum_{\beta} U_{\varkappa-\beta}^{(m)} u_{\beta}^{(n)} - \sum_{\gamma} (V_{\varkappa-\gamma}^{(m)} + V_{\varkappa-\gamma-1}^{(m)}) v_{\gamma}^{(n)} \\
&\quad - \sum_{\delta} (W_{\varkappa-\delta+1}^{(m)} + W_{\varkappa-\delta}^{(m)}) w_{\delta}^{(n)}, \\
u_{\lambda}^{(m+n)} &= \sum_{\alpha} U_{\lambda-\alpha+1}^{(m)} t_{\alpha}^{(n)} + \sum_{\beta} T_{\lambda-\beta+1}^{(m)} u_{\beta}^{(n)} - \sum_{\gamma} (W_{\lambda-\gamma+1}^{(m)} + W_{\lambda-\gamma}^{(n)}) v_{\gamma}^{(n)} \\
&\quad - \sum_{\delta} (V_{\lambda-\delta+1}^{(m)} + V_{\lambda-\delta}^{(m)}) w_{\delta}^{(n)}, \\
v_{\mu}^{(m+n)} &= \sum_{\alpha} V_{\mu-\alpha+1}^{(m)} t_{\alpha}^{(n)} + \sum_{\beta} W_{\mu-\beta+1}^{(m)} u_{\beta}^{(n)} + \sum_{\gamma} T_{\mu-\gamma+1}^{(m)} v_{\gamma}^{(n)} \\
&\quad + \sum_{\delta} U_{\mu-\delta+1}^{(m)} w_{\delta}^{(n)} \text{ und} \\
w_{\nu}^{(m+n)} &= \sum_{\alpha} W_{\nu-\alpha+1}^{(m)} t_{\alpha}^{(n)} + \sum_{\beta} V_{\nu-\beta}^{(m)} u_{\beta}^{(n)} + \sum_{\gamma} U_{\nu-\gamma}^{(m)} v_{\gamma}^{(n)} + \sum_{\delta} T_{\nu-\delta+1}^{(m)} w_{\delta}^{(n)}
\end{aligned} \tag{43}
$$

mit $1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{m+n}{2}\right]+1$, $1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{m+n+1}{2}\right]$, $1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{m+n}{2}\right]$ und $1 \leqq \alpha \leqq \left[\frac{n}{2}\right]+1$, $1 \leqq \beta,\ \delta \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$, $1 \leqq \gamma \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$, wobei $T_{i}^{(m)}, U_{j}^{(m)}, V_{k}^{(m)}$ und $W_{l}^{(m)}$ durch (42) definiert sind, deren Richtigkeit man vermöge (41) leicht durch vollständige Induktion beweisen kann.

§ 3.

Einführung eines Kalküls mit geordneten $(2n+1)$-Tupeln von Zahlen.

Der erhaltene Satz über die Darstellung der (t, u, v, w)-Basis für den Grad $m+n$ durch die zum Grade m und n gehörigen (t, u, v, w)-Basen läßt die Einführung eines Kalküls mit geordneten $(2n+1)$-Tupeln von Zahlen als zweckmäßig erscheinen. Ein solches geordnetes $(2n+1)$-Tupel von Zahlen wollen wir eine komplexe n-ter Stufe nennen und sie mit

$$\{a_{\varkappa}^{(n)};\ b_{\lambda}^{(n)};\ c_{\mu}^{(n)};\ d_{\nu}^{(n)}\},$$

$$\left(1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n}{2}\right]+1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right],\ 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right) \tag{44}$$

bezeichnen. Die $2n+1$ Zahlen $a_{\varkappa}^{(n)}, b_{\lambda}^{(n)}, c_{\mu}^{(n)}$ und $d_{\nu}^{(n)}$, aus welchen eine komplexe Zahl n-ter Stufe besteht, sollen ihre Komponenten heißen.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen endlicher Stufe wollen wir durch folgende Definitionen festlegen.

1. Definition der Gleichheit zweier komplexer Zahlen n-ter Stufe. Zwei komplexe Zahlen n-ter Stufe

$$Z_{\alpha}^{(n)} = \{a_{\alpha\varkappa}^{(n)};\ b_{\alpha\lambda}^{(n)};\ c_{\alpha\mu}^{(n)};\ d_{\alpha\nu}^{(n)}\},$$

$$\left(1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n}{2}\right]+1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right],\ 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right);\quad \alpha = 1, 2$$

sind einander gleich, in Zeichen $Z_1^{(n)} = Z_2^{(n)}$, wenn entsprechende Komponenten einander gleich sind, also

$$a_{1\varkappa}^{(n)} = a_{2\varkappa}^{(n)},\quad b_{1\lambda}^{(n)} = b_{2\lambda}^{(n)},\quad c_{1\mu}^{(n)} = c_{2\mu}^{(n)} \quad \text{und} \quad d_{1\nu}^{(n)} = d_{2\nu}^{(n)}$$

ist.

2. Definition der Addition zweier komplexer Zahlen n-ter Stufe. Unter der Summe zweier komplexer Zahlen n-ter Stufe

$$Z_{\alpha}^{(n)} = \{a_{\alpha\varkappa}^{(n)};\ b_{\alpha\lambda}^{(n)};\ c_{\alpha\mu}^{(n)};\ d_{\alpha\nu}^{(n)}\},$$

$$\left(1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n}{2}\right]+1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right],\ 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right);\quad \alpha = 1, 2$$

soll die komplexe Zahl n-ter Stufe

$$Z^{(n)} = \{a_{1\varkappa}^{(n)} + a_{2\varkappa}^{(n)};\ b_{1\lambda}^{(n)} + b_{2\lambda}^{(n)};\ c_{1\mu}^{(n)} + c_{2\mu}^{(n)};\ d_{1\nu}^{(n)} + d_{2\nu}^{(n)}\},$$

$$\left(1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n}{2}\right]+1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right],\ 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right) \tag{45}$$

verstanden werden und wir schreiben hierfür $Z^{(n)} = Z_1^{(n)} + Z_2^{(n)}$.

3. Definition der Multiplikation einer komplexen Zahl n-ter Stufe mit einer reellen Zahl p.

Unter dem Produkt einer komplexen Zahl n-ter Stufe

$$Z^{(n)} = \{a_{\varkappa}^{(n)};\ b_{\lambda}^{(n)};\ c_{\mu}^{(n)};\ d_{\nu}^{(n)}\},$$

$$\left(1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n}{2}\right]+1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right],\ 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

und einer reellen Zahl p verstehen wir die komplexe Zahl n-ter Stufe

$$\{p\,a_{\varkappa}^{(n)};\ p\,b_{\lambda}^{(n)};\ p\,c_{\mu}^{(n)}\ \ p\,d_{\nu}^{(n)}\},$$

$$\left(1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n}{2}\right]+1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right],\ 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

und schreiben für sie $p\,\mathfrak{Z}^{(n)}$.

4. Definition der Multiplikation einer komplexen Zahl m-ter Stufe und einer komplexen Zahl n-ter Stufe.

Das Produkt aus einer komplexen Zahl m-ter Stufe $\mathfrak{Z}^{(m)}$ und einer komplexen Zahl n-ter Stufe $\mathfrak{Z}^{(n)}$ soll eine komplexe Zahl $(m+n)$-ter Stufe $\mathfrak{Z}^{(m+n)}$ sein, deren $2(m+n)+1$ Komponenten aus den $2m+1$ bzw. $2n+1$ Komponenten der beiden Faktoren in derselben Weise zu berechnen sind, wie die Komponenten der (t, u, v, w)-Basis für den Grad $m+n$ aus den Komponenten der (t, u, v, w)-Basen für die Grade m und n.

Ist

$$\mathfrak{Z}^{(n)} = \{a_{\alpha}^{(n)};\ b_{\beta}^{(n)};\ c_{\gamma}^{(n)};\ d_{\delta}^{(n)}\},$$

$$\left(1 \leqq \alpha \leqq \left[\frac{n}{2}\right]+1,\ 1 \leqq \beta,\ \delta \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right],\ 1 \leqq \gamma \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

und

$$\mathfrak{Z}^{(m)} = \{a_{i}^{(m)};\ b_{j}^{(m)};\ c_{k}^{(m)};\ d_{l}^{(m)}\},$$

$$\left(1 \leqq i \leqq \left[\frac{m}{2}\right]+1,\ 1 \leqq j,\ l \leqq \left[\frac{m+1}{2}\right],\ 1 \leqq k \leqq \left[\frac{m}{2}\right]\right),$$

so soll also für

$$\mathfrak{Z}^{(m+n)} = \{a_{\varkappa}^{(m+n)};\ b_{\lambda}^{(m+n)};\ c_{\mu}^{(m+n)};\ d_{\nu}^{(m+n)}\},$$

$$\left(1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{m+n}{2}\right]+1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{m+n+1}{2}\right],\ 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{m+n}{2}\right]\right)$$

nach (43)

$$\begin{aligned}
a_{\varkappa}^{(m+n)} &= \sum_{\alpha} A_{\varkappa-\alpha+1}^{(m)}\, a_{\alpha}^{(n)} + \sum_{\beta} B_{\varkappa-\beta}^{(m)}\, b_{\beta}^{(n)} - \sum_{\gamma} (C_{\varkappa-\gamma}^{(m)} + C_{\varkappa-\gamma-1}^{(m)})\, c_{\gamma}^{(n)} \\
&\quad - \sum_{\delta} (D_{\varkappa-\delta+1}^{(m)} + D_{\varkappa-\delta}^{(m)})\, d_{\delta}^{(n)}, \\
b_{\lambda}^{(m+n)} &= \sum_{\alpha} B_{\lambda-\alpha+1}^{(m)}\, a_{\alpha}^{(n)} + \sum_{\beta} A_{\lambda-\beta+1}^{(m)}\, b_{\beta}^{(n)} - \sum_{\gamma} (D_{\lambda-\gamma+1}^{(m)} + D_{\lambda-\gamma}^{(m)})\, c_{\gamma}^{(n)} \\
&\quad - \sum_{\delta} (C_{\lambda-\delta+1}^{(m)} + C_{\lambda-\delta}^{(m)})\, d_{\delta}^{(n)}, \qquad (46) \\
c_{\mu}^{(m+n)} &= \sum_{\alpha} C_{\mu-\alpha+1}^{(m)}\, a_{\alpha}^{(n)} + \sum_{\beta} D_{\mu-\beta+1}^{(m)}\, b_{\beta}^{(n)} \\
&\quad + \sum_{\gamma} A_{\mu-\gamma+1}^{(m)}\, c_{\gamma}^{(n)} + \sum_{\delta} B_{\mu-\delta+1}^{(m)}\, d_{\delta}^{(n)}
\end{aligned}$$

und

$$d_{\nu}^{(m+n)} = \sum_{\alpha} D_{\nu-\alpha+1}^{(m)}\, a_{\alpha}^{(n)} + \sum_{\beta} C_{\nu-\beta}^{(m)}\, b_{\beta}^{(n)} + \sum_{\gamma} B_{\nu-\gamma}^{(m)}\, c_{\gamma}^{(n)} + \sum_{\delta} A_{\nu-\delta+1}^{(m)}\, d_{\delta}^{(n)}$$

sein, worin

$$A_i^{(m)} = \begin{cases} a_i^{(m)} \text{ für } 1 \leqq i \leqq \left[\frac{m}{2}\right] + 1, \\ 0 \text{ für alle anderen } i, \end{cases}$$

$$B_j^{(m)} = \begin{cases} b_j^{(m)} \text{ für } 1 \leqq j \leqq \left[\frac{m+1}{2}\right], \\ 0 \text{ für alle anderen } j, \end{cases}$$

(47)

$$C_k^{(m)} = \begin{cases} c_k^{(m)} \text{ für } 1 \leqq k \leqq \left[\frac{m}{2}\right], \\ 0 \text{ für alle anderen } k \text{ und} \end{cases}$$

$$D_l^{(m)} = \begin{cases} d_l^{(m)} \text{ für } 1 \leqq l \leqq \left[\frac{m+1}{2}\right] \\ 0 \text{ für alle anderen } l \end{cases}$$

ist. Wir schreiben $Z^{(m+n)} = Z^{(m)} . Z^{(n)}$.

Die Gleichheitsdefinition für komplexe Zahlen n-ter Stufe ist offenbar so beschaffen, daß die durch sie festgelegte Beziehung zwischen komplexen Zahlen derselben Stufe reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, also die für die Gleichheit kennzeichnenden Eigenschaften besitzt.

Die durch (45) erklärte Summenbildung für komplexe Zahlen gleicher Stufe genügt folgenden beiden formalen Rechenregeln: Es ist

$$Z_1^{(n)} + Z_2^{(n)} = Z_2^{(n)} + Z_1^{(n)} \text{ und } (Z_1^{(n)} + Z_2^{(n)}) + Z_3^{(n)} = Z_1^{(n)} + (Z_2^{(n)} + Z_3^{(n)}).$$

Die Addition verhält sich also kommutativ und assoziativ. Erklärt man wie üblich die Subtraktion als Umkehrung der Addition, so ist die Differenz zweier komplexer Zahlen n-ter Stufe eine eindeutig bestimmte komplexe Zahl derselben Stufe.

Auch die durch (46) definierte Produktbildung verhält sich ebenso wie die Summenbildung (45) kommutativ und assoziativ. Es ist mithin

$$Z^{(n_1)} Z^{(n_1)} = Z^{(n_2)} Z^{(n_1)} \tag{48}$$

und

$$(Z^{(n_1)} Z^{(n_2)}) Z^{(n_3)} = Z^{(n_1)} (Z^{(n_2)} Z^{(n_3)}). \tag{49}$$

Um die Richtigkeit von (48) zu beweisen, schreiben wir uns zunächst nach (46) die a-Komponenten von $Z^{(n_1)} Z^{(n_2)}$ und von $Z^{(n_2)} Z^{(n)}$ an und zeigen, daß sie gleich sind.

Es sind

$$\sum_{\alpha_2} A^{(n_1)}_{\varkappa-\alpha_2+1} A^{(n_2)}_{\alpha_2} + \sum_{\beta_2} B^{(n_1)}_{\varkappa-\beta_2} B^{(n_2)}_{\beta_2} - \sum_{\gamma_2} (C^{(n_1)}_{\varkappa-\gamma_2} + C^{(n_1)}_{\varkappa-\gamma_2-1}) C^{(n_2)}_{\gamma_2} - \sum_{\delta_2} (D^{(n_1)}_{\varkappa-\delta_2+1} + D^{(n_1)}_{\varkappa-\delta_2}) D^{(n_2)}_{\delta_2} \tag{50}$$

die a-Komponenten von $Z^{(n_1)} Z^{(n_2)}$ und

$$\sum_{\alpha_1} A^{(n_2)}_{\varkappa-\alpha_1+1} A^{(n_1)}_{\alpha_1} + \sum_{\beta_1} B^{(n_2)}_{\varkappa-\beta} B^{(n_1)}_{\beta_1} - \sum_{\gamma_1} (C^{(n_2)}_{\varkappa-\gamma_1} + C^{(n_2)}_{\varkappa-\gamma_1-1}) C^{(n_1)}_{\gamma_1} - \sum_{\delta_1} (D^{(n_2)}_{\varkappa-\delta_1+1} + D^{(n_2)}_{\varkappa-\delta_1}) D^{(n_1)}_{\delta_1} \tag{51}$$

die a-Komponenten von $Z^{(n_2)}\,Z^{(n_1)}$. In (50) und (51) ist

$$1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n_1+n_2}{2}\right] + 1$$

und für $\nu = 1, 2$:

$$1 \leqq \alpha_\nu \leqq \left[\frac{n_\nu}{2}\right] + 1, \quad 1 \leqq \beta_\nu,\ \delta_\nu \leqq \left[\frac{n_\nu+1}{2}\right], \quad 1 \leqq \gamma_\nu \leqq \left[\frac{n_\nu}{2}\right],$$

ferner

$$A^{(n_\nu)}_{i_\nu} = \begin{cases} a^{(n_\nu)}_{i_\nu}, \text{ wenn } 1 \leqq i_\nu \leqq \left[\frac{n_\nu}{2}\right] + 1, \\ 0 \text{ für alle übrigen } i_\nu, \end{cases}$$

$$B^{(n_\nu)}_{j_\nu} = \begin{cases} b^{(n_\nu)}_{j_\nu}, \text{ wenn } 1 \leqq j_\nu \leqq \left[\frac{n_\nu+1}{2}\right], \\ 0 \text{ für alle übrigen } j_\nu, \end{cases}$$

(52)

$$C^{(n_\nu)}_{k_\nu} = \begin{cases} c^{(n_\nu)}_{k_\nu}, \text{ wenn } 1 \leqq k_\nu \leqq \left[\frac{n_\nu}{2}\right], \\ 0 \text{ für alle übrigen } k_\nu \text{ und} \end{cases}$$

$$D^{(n_\nu)}_{l_\nu} = \begin{cases} d^{(n_\nu)}_{l_\nu}, \text{ wenn } 1 \leqq l \leqq \left[\frac{n_\nu+1}{2}\right], \\ 0 \text{ für alle übrigen } l_\nu \end{cases}$$

führt man in $\sum\limits_{\alpha_2} A^{(n_1)}_{\varkappa-\alpha_2+1}\, A^{(n_2)}_{\alpha_2}$ statt des Summationsindex α_2 den neuen Summationsindex $\alpha_1 = \varkappa - \alpha_2 + 1$ ein, so erhält man $\sum\limits_{\alpha_1} A^{(n_2)}_{\varkappa-\alpha_1+1}\, A^{(n_1)}_{\alpha}$. Analog ergibt sich, daß

$$\sum_{\beta_2} B^{(n_1)}_{\varkappa-\beta_2}\, B^{(n_2)}_{\beta_2} = \sum_{\beta_1} B^{(n_2)}_{\varkappa-\beta_1}\, B^{(n_1)}_{\beta_1}, \quad \sum_{\gamma_2} C^{(n_1)}_{\varkappa-\gamma_2}\, C^{(n_2)}_{\gamma_2} = \sum_{\gamma_1} C^{(n_2)}_{\varkappa-\gamma_1}\, C^{(n_1)}_{\gamma_1},$$

$$\sum_{\gamma_2} C^{(n_1)}_{\varkappa-\gamma_2-1}\, C^{(n_2)}_{\gamma_2} = \sum_{\gamma_1} C^{(n_2)}_{\varkappa-\gamma_1-1}\, C^{(n_1)}_{\gamma_1}, \quad \sum_{\delta_2} D^{(n_1)}_{\varkappa-\delta_2+1}\, D^{(n_2)}_{\delta_2} = \sum_{\delta_1} D^{(n_2)}_{\varkappa-\delta_1+1}\, D^{(n_1)}_{\delta_1}$$

$$\text{und} \quad \sum_{\delta_2} D^{(n_1)}_{\varkappa-\delta_2}\, D^{(n_2)}_{\delta_2} = \sum_{\delta_1} D^{(n_2)}_{\varkappa-\delta_1}\, D^{(n_1)}_{\delta_1}.$$

Damit ist also verifiziert, daß entsprechende a-Komponenten von $Z^{(n_1)}\,Z^{(n_2)}$ und $Z^{(n_2)}\,Z^{(n_1)}$ einander gleich sind. Ebenso leicht kann der Nachweis für die Gleichheit entsprechender b-, c- und d-Komponenten erbracht werden, womit dann die Richtigkeit von (48) nachgewiesen ist.

Um die Behauptung (49) nachzuprüfen, bemerken wir zunächst, daß sowohl die Komponenten von $(Z^{(n_1)}\,Z^{(n_2)})\,Z^{(n_3)}$ (53) als auch die Komponenten von $Z^{(n_1)}\,(Z^{(n_2)}\,Z^{(n_3)})$ (54) trilineare Formen der Komponenten von $Z^{(n_1)}$, $Z^{(n_2)}$ und $Z^{(n_3)}$ sind. (49) wird dann bewiesen sein, sobald wir gezeigt haben, daß die Koeffizienten einander entsprechender Glieder derjenigen Trilinearformen gleich sind, welche analoge Komponenten von (53) und (54) darstellen. Der erforderliche Koeffizientenvergleich läßt sich leicht durchführen. Um zu sehen, wie er vor sich geht, wollen wir beispielsweise bei analogen a-Komponenten von (53) und (54) diejenigen Glieder miteinander vergleichen, welche die Bauart $g_{i_1 i_2 i_3}\, A^{(n_1)}_{i_1}\, A^{(n_2)}_{i_2}\, A^{(n_3)}_{i_3}$ (55) haben.

Da nach (48) $(Z^{(n_1)}\,Z^{(n_2)})\,Z^{(n_3)} = Z^{(n_3)}\,(Z^{(n_1)}\,Z^{(n_2)})$ ist, so erhält man wegen (46) für die Glieder (55) in der $\varkappa$-ten a-Komponente von (53)

$$\sum_{\alpha_2}\sum_{\varkappa_3} A^{(n_3)}_{\varkappa-\varkappa_3+1}\,A^{(n_1)}_{\varkappa_3-\alpha_2+1}\,A^{(n_2)}_{\alpha_2} \tag{56}$$

und in der $\varkappa$-ten a-Komponente von (54)

$$\sum_{\alpha_3}\sum_{\varkappa_1} A^{(n_1)}_{\varkappa-\varkappa_1+1}\,A^{(n_2)}_{\varkappa_1-\alpha_3+1}\,A^{(n_3)}_{\alpha_3}. \tag{57}$$

In (56) und (57) ist

$$A^{(n_\nu)}_{i_\nu} = \begin{cases} a^{(n_\nu)}_{i_\nu}, \text{ wenn } 1 \leqq i_\nu \leqq \left[\frac{n_\nu}{2}\right] + 1, \\ 0 \text{ für alle übrigen } i_\nu; \end{cases}$$

$$\nu = 1, 2, 3,\ 1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n_1+n_2+n_3}{2}\right] + 1,\ 1 \leqq \varkappa_1 \leqq \left[\frac{n_2+n_3}{2}\right] + 1,$$

$$1 \leqq \varkappa_3 \leqq \left[\frac{n_1+n_2}{2}\right] + 1 \text{ und } 1 \leqq \alpha_\nu \leqq \left[\frac{n}{2}\right] + 1;\ \nu = 2, 3.$$

Führen wir nun in (56) den neuen Summtionsindex $\varkappa_1$ durch $\alpha_2 = \varkappa_3 + \varkappa_1 - \varkappa$ und in (57) $\varkappa_3$ durch $\alpha_3 = \varkappa - \varkappa_3 + 1$ ein, so gehen (56) und (57) in

$$\sum_{\varkappa_1}\sum_{\varkappa_3} A^{(n_1)}_{\varkappa-\varkappa_1+1}\,A^{(n_2)}_{\varkappa_3+\varkappa_1-\varkappa}\,A^{(n_3)}_{\varkappa-\varkappa_3+1}$$

über, womit die Gleichheit von (56) und (57) erkannt ist.

Aus den Definitionen der Addition (45) und der Multiplikation (46) folgt noch, daß

$$(Z^{(m)}_1 + Z^{(m)}_2)\,Z^{(n)} = Z^{(m)}_1\,Z^{(n)} + Z^{(m)}_2\,Z^{(n)} \tag{58}$$

ist, die Multiplikation also dem distributiven Gesetz gehorcht.

Schließlich wollen wir über die Multiplikation einen Satz beweisen, welcher für die Division von grundlegender Bedeutung ist. Es zeigt sich nämlich, daß ein Produkt aus einer komplexen Zahl m-ter Stufe und einer komplexen Zahl n-ter Stufe dann und nur dann verschwindet, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren verschwindet. Wir wollen von einer komplexen Zahl endlicher Stufe sagen, daß sie verschwindet, wenn ihre sämtlichen Komponenten Null sind.

Wir behaupten also, daß in $Z^{(m)}\,Z^{(n)} = Z^{(m+n)}$ dann und nur dann (59) $Z^{(m+n)} = 0$ ist, wenn wenigstens (60) $Z^{(m)} = 0$ oder (61) $Z^{(n)} = 0$ ist.

Ist wenigstens (60) oder (61) erfüllt, so folgt (59), wie unmittelbar aus (46) zu ersehen ist. Es bleibt mithin nur noch zu beweisen, daß aus (59) wenigstens (60) oder (61) folgt.

Wegen (59) ist $a^{(m+n)}_1 = d^{(m+n)}_1 = 0$, was nach (46) mit

$$a^{(m)}_1\,a^{(n)}_1 - d^{(m)}_1\,d^{(n)}_1 = 0,\ d^{(m)}_1\,a^{(n)}_1 + a^{(m)}_1\,d^{(n)}_1 = 0 \tag{62}$$

gleichbedeutend ist.

Es sind folgende drei Fälle möglich:

(63) $$\alpha)\ (a_1^{(m)})^2 + (d_1^{(m)})^2 > 0,$$

(64) $$\beta)\ (a_1^{(n)})^2 + (d_1^{(n)})^2 > 0$$

und

(65) $$\gamma)\ (a_1^{(m)})^2 + (d_1^{(m)})^2 = 0, \quad (a_1^{(n)})^2 + (d_1^{(n)})^2 = 0.$$

Der Fall α). Dann ergibt sich aus (62) wegen (63)

(66) $$a_1^{(n)} = d_1^{(n)} = 0$$

und deshalb lautet $b_1^{(m+n)} = c_1^{(m+n)} = 0$ nach (46) $a_1^{(m)} b_1^{(n)} - d_1^{(m)} c_1^{(n)} = 0$, $d_1^{(m)} b_1^{(n)} + a_1^{(m)} c_1^{(n)} = 0$, woraus wegen (63)

(67) $$b_1^{(n)} = c_1^{(n)} = 0$$

folgt.

Es sei nun bewiesen, daß für $1 \leqq p \leqq h$

(68) $$a_p^{(n)} = b_p^{(n)} = c_p^{(n)} = d_p^{(n)} = 0$$

ist, wobei $h \leqq \left[\frac{n}{2}\right] - 1$ sei. Wir wollen dann zeigen, daß auch

(69) $$a_{h+1}^{(n)} = b_{h+1}^{(n)} = c_{h+1}^{(n)} = d_{h+1}^{(n)} = 0$$

ist.

Wegen (68) hat nach (46) $a_{h+1}^{(m+n)} = d_{h+1}^{(m+n)} = 0$ die Gestalt

$$a_1^{(m)} a_{h+1}^{(n)} - d_1^{(m)} d_{h+1}^{(n)} = 0 \text{ und } d_1^{(m)} a_{h+1}^{(n)} + a_1^{(m)} d_{h+1}^{(n)} = 0,$$

was wegen (63)

(70) $$a_{h+1}^{(n)} = d_{h+1}^{(n)} = 0$$

zur Folge hat. Mit Rücksicht auf (68) und (70) wird dann aber $b_{h+1}^{(m+n)} = c_{h+1}^{(m+n)} = 0$ nach (46) zu $a_1^{(m)} b_{h+1}^{(n)} - d_1^{(m)} c_{h+1}^{(n)} = 0$ und $d_1^{(m)} b_{h+1}^{(n)} + a_1^{(m)} c_{h+1}^{(n)} = 0$, was wegen (63) $b_{h+1}^{(n)} = c_{h+1}^{(n)} = 0$ ergibt. Damit ist aber (69) bewiesen.

Da (68) jedenfalls für $h = 1$ erfüllt ist, was aus (66) und (67) ersichtlich ist, gilt nach dem eben Bewiesenen (68) auch für $h = 2$. Durch wiederholte Anwendung dieser Schlußweise bekommen wir die Aussage, daß (68) auch noch für $h = \left[\frac{n}{2}\right]$ richtig ist.

Ist nun $n = 2n_1$, also eine gerade Zahl, so haben wir bis jetzt gezeigt, daß von $Z^{(n)}$ alle Komponenten mit Ausnahme $a_{n_1+1}^{(n)}$ gleich Null sind. Um auch noch das Verschwinden der Komponenten $a_{n_1+1}^{(n)}$ zu beweisen, ziehen wir die beiden Gleichungen $a_{n_1+1}^{(m+n)} = d_{n_1+1}^{(m+n)} = 0$ heran, welche nach (46) $a_1^{(m)} a_{n_1+1}^{(n)} = 0$ und $d_1^{(m)} a_{n_1+1}^{(n)} = 0$ lauten.

Weil wegen (63) entweder $a_1^{(m)}$ oder $d_1^{(m)}$ von Null verschieden sind, muß auch $a_{n_1+1}^{(n)} = 0$ sein.

Ist $n = 2n_1 - 1$, also eine ungerade Zahl, so wird $h = \left[\frac{n}{2}\right] = n_1 - 1$. In diesem Falle ist also das Verschwinden aller Komponenten von $Z^{(n)}$ bis auf $a_{n_1}^{(n)}$, $b_{n_1}^{(n)}$ und $d_{n_1}^{(n)}$ bereits bewiesen. Um zu zeigen, daß auch $a_{n_1}^{(n)} = d_{n_1}^{(n)} = 0$ (71) ist, ziehen wir die beiden Gleichungen $a_{n_1}^{(m+n)} = d_{n_1}^{(m+n)} = 0$ heran, welche nach (46) die Gestalt $a_1^{(m)} a_{n_1}^{(n)} - d_1^{(m)} d_{n_1}^{(n)} = 0$ und $d_1^{(m)} a_{n_1}^{(n)} + a_1^{(m)} d_{n_1}^{(n)} = 0$ haben, aus denen wegen (63) sich sofort (71) ergibt. Um auch noch das Verschwinden von $b_{n_1}^{(n)}$ nachzuweisen, betrachten wir die beiden Gleichungen $b_{n_1}^{(m+n)} = c_{n_1}^{(m+n)} = 0$, welche $a_1^{(m)} b_{n_1}^{(n)} = 0$ und $d_1^{(m)} b_{n_1}^{(n)} = 0$ lauten. Da nach (63) entweder $a_1^{(m)}$ oder $d_1^{(m)}$ von Null verschieden sein muß, ist $b_{n_1}^{(n)} = 0$.

Als Ergebnis haben wir mithin erhalten: Ist $(a_1^{(m)})^2 + (d_1^{(m)})^2 > 0$, also $Z^{(m)} \neq 0$, so folgt aus $Z^{(m)} Z^{(n)} = 0$, daß $Z^{(n)} = 0$ sein muß.

Da die Multiplikation sich kommutativ verhält, so ist der Fall β) vom Fall α) nicht verschieden. Es bleibt mithin nur noch der Fall γ) zu untersuchen.

Im Fall γ) ist wegen (65)

$$a_1^{(m)} = d_1^{(m)} = a_1^{(n)} = d_1^{(n)} = 0. \tag{71}$$

Streichen wir in $Z^{(m)}$ die beiden Komponenten $a_1^{(m)}$ und $d_1^{(m)}$ und setzen wir $a_\varkappa^{(m)} = d_{\nu'}^{(m-1)}$, $b_\lambda^{(m)} = a_{\varkappa'}^{(m-1)}$, $c_\mu^{(m)} = b_{\lambda'}^{(m-1)}$ und $d_\nu^{(m)} = c_{\mu'}^{(m-1)}$, wobei $\varkappa - 1 = \nu'$, $\lambda = \varkappa'$, $\mu = \lambda'$ und $\nu - 1 = \mu'$ sein soll, so wird wegen (44) $1 \leqq \varkappa' \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1$, $1 \leqq \lambda', \nu' \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ und $1 \leqq \mu' \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Deshalb bilden die Größen $a_{\varkappa'}^{(m-1)}$, $b_{\lambda'}^{(m-1)}$, $c_{\mu'}^{(m-1)}$ und $d_{\nu'}^{(m-1)}$ die Komponenten einer komplexen Zahl $(m-1)$-ter Stufe $Z'^{(m-1)}$. Auf analoge Weise erhält man aus $Z^{(n)}$ durch Streichen von $a_1^{(n)}$ und $d_1^{(n)}$ eine komplexe Zahl $(n-1)$-Stufe $Z'^{(n-1)}$.

Wegen (71) ist in $Z^{(m+n)} = Z^{(m)} Z^{(n)}$ nach (46) $a_1^{(m+n)} = b_1^{(m+n)} = c_1^{(m+n)} = d_1^{(m+n)} = 0$. Streichen wir in $Z^{(m+n)}$ die vier Komponenten $a_1^{(m+n)}$, $b_1^{(m+n)}$, $c_1^{(m+n)}$ und $d_1^{(m+n)}$ und setzen auch hier $a_\varkappa^{(m+n)} = d_\nu^{(m+n-2)}$, $b_\lambda^{(m+n)} = a_{\varkappa'}^{(m+n-2)}$, $c_\mu^{(m+n)} = b_{\lambda'}^{(m+n-2)}$ und $d_\nu^{(m+n)} = c_{\mu'}^{(m+n-2)}$, wobei $\varkappa - 1 = \nu'$, $\lambda - 1 = \varkappa'$, $\mu - 1 = \lambda'$ und $\nu - 1 = \mu'$ ist, so wird wegen (44)

$$1 \leqq \varkappa' \leqq \left[\frac{m+n-2}{2}\right] + 1,\ 1 \leqq \lambda',\ \nu' \leqq \left[\frac{m+n-1}{2}\right]$$

und

$$1 \leqq \mu' \leqq \left[\frac{m+n-2}{2}\right].$$

Deshalb bilden die Größen $a_{\varkappa'}^{(m+n-2)}$, $b_{\lambda'}^{(m+n-2)}$, $c_{\mu'}^{(m+n-2)}$ und $d_{\nu'}^{(m+n-2)}$ die Komponenten einer komplexen Zahl $(m+n-2)$-ter Stufe $Z'^{(m+n-2)}$.

Nun ist mit Hilfe von (46) unschwer zu erkennen, daß

$$Z'^{(m+n-2)} = Z'^{(m-1)}\, Z'^{(n-1)} \tag{72}$$

ist.

Da $Z'^{(m-1)}$ alle diejenigen Komponenten von $Z^{(m)}$ und $Z'^{(n-1)}$ alle diejenigen Komponenten von $Z^{(n)}$ enthält, von denen nach (71) noch nicht feststeht, daß sie Null sind und weil $Z'^{(m+n-2)}$ ebenso wie $Z^{(m+n)}$ lauter verschwindende Komponenten besitzt, haben wir mithin zu zeigen, daß aus $Z'^{(m+n-2)} = 0$ wenigstens $Z'^{(m-1)} = 0$ oder $Z'^{(n-1)} = 0$ folgt.

Zusammenfassend können wir also feststellen: In den Fällen α) und β) ist der zu beweisende Satz, daß ein Produkt aus einer komplexen Zahl m-ter und einer komplexen Zahl n-ter Stufe nur dann verschwindet, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren verschwindet, als richtig erkannt. Im Falle γ) gilt er dann, wenn er für das Produkt aus einer komplexen Zahl $(m-1)$-ter und einer komplexen Zahl $(n-1)$-ter Stufe zutreffend ist.

Unser Beweis wird also vollständig sein, wenn wir noch gezeigt haben werden, daß ein Produkt aus einer komplexen Zahl n-ter und einer komplexen Zahl erster Stufe nur dann verschwindet, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren verschwindet. Ist $Z^{(n+1)} = Z^{(n)}\, Z^{(1)}$, so wird behauptet, daß $Z^{(n+1)} = 0$ wenigstens $Z^{(n)} = 0$ oder $Z^{(1)} = 0$ zur Folge hat. Wir gehen von den beiden Gleichungen $a_1^{(n+1)} = d_1^{(n+1)} = 0$ aus, welche wegen (41) und (42)

$$a_1^{(n)}\, a_1^{(1)} - d_1^{(n)}\, d_1^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad d_1^{(n)}\, a_1^{(1)} + a_1^{(n)}\, d_1^{(1)} = 0$$

lauten. Es sind wieder die drei Fälle:

$$\alpha)\ (a_1^{(n)})^2 + (d_1^{(n)})^2 > 0, \quad \beta)\ (a_1^{(1)})^2 + (d_1^{(1)})^2 > 0$$

und

$$\gamma)\ (a_1^{(n)})^2 + (d_1^{(n)})^2 = 0,\ (a_1^{(1)})^2 + (d_1^{(1)})^2 = 0$$

möglich. Durch dieselben Schlußweisen wie im allgemeinen Falle können wir zeigen, daß bei α), wo $Z^{(n)} \neq 0$ ist, $Z^{(1)} = 0$ und bei β), wo $Z^{(1)} \neq 0$ ist, $Z^{(n)} = 0$ sein muß.

Im Fall γ) ist $a_1^{(1)} = d_1^{(1)} = 0$ und $a_1^{(n)} = d_1^{(n)} = 0$. Wir betrachten nun von $Z^{(n+1)}$ die Komponenten $a_\varkappa^{(n+1)} = b_{\varkappa-1}^{(n)}\, b_1^{(1)}$, $b_\lambda^{(n+1)} = a_\lambda^{(n)}\, b_1^{(1)}$, $c_{\mu\nu}^{(n+1)} = d_\mu^{(n)}\, b_1^{(1)}$ und $d_\nu^{(n+1)} = c_{\nu-1}^{(n)}\, b_1^{(1)}$, wobei $2 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$, $1 \leqq \lambda$, $\nu \leqq \left[\frac{n+2}{2}\right]$ und $2 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ist, aus denen leicht zu ersehen ist, daß bei $Z^{(n+1)} = 0$ und $Z^{(1)} \neq 0$, also $b_1^{(1)} \neq 0$, $Z^{(n)} = 0$ und bei $Z^{(n+1)} = 0$ und $Z^{(n)} \neq 0$, wenn also wenigstens eine Komponente von $Z^{(n)}$ nicht verschwindet, $Z^{(1)} = 0$ sein muß.

Wir bemerken noch, daß auch das Produkt aus einer komplexen Zahl n-ter Stufe und einer reellen Zahl dann und nur dann verschwindet, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren Null ist.

Was die Umkehrung der Multiplikation, die Division, anbelangt, so ist diese im allgemeinen nicht ausführbar. Ist $Z^{(m)} \neq 0$, so hat aber die Aufgabe, eine komplexe Zahl endlicher Stufe zu bestimmen, welche mit $Z^{(m)}$ multipliziert eine vorgegebene komplexe Zahl n-ter Stufe $Z^{(n)}$ ergibt, höchstens nur eine Lösung. Ist also die Division durch eine von Null verschiedene komplexe Zahl endlicher Stufe möglich, so ist sie notwendig eindeutig.

Als Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch die Frage erörtern, ob sich das System der komplexen Zahlen $(m+n)$-ter Stufe, wobei m und n natürliche Zahlen sind, nicht in einem gewissen Sinne als Erweiterung des Systems der komplexen Zahlen m-ter Stufe auffassen lasse.

Ordnen wir der komplexen Zahl m-ter Stufe

$$Z^{(m)} = \{a_{\varkappa}^{(m)};\ b_{\lambda}^{(m)};\ c_{\mu}^{(m)};\ d_{\nu}^{(m)}\},$$

$$\left(1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{m}{2}\right] + 1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{m+1}{2}\right],\ 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{m}{2}\right]\right)$$

diejenige komplexe Zahl $(m+n)$-ter Stufe $Z_m^{(m+n)}$ zu, welche die Komponenten

$$a_{\varkappa m}^{(m+n)} = \begin{cases} a_{\varkappa}^{(m)} \text{ für } 1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{m}{2}\right] + 1, \\ 0 \text{ für } \left[\frac{m}{2}\right] + 2 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{m+n}{2}\right] + 1, \end{cases}$$

$$b_{\lambda m}^{(m+n)} = \begin{cases} b_{\lambda}^{(m)} \text{ für } 1 \leqq \lambda \leqq \left[\frac{m+1}{2}\right], \\ 0 \text{ für } \left[\frac{m+1}{2}\right] + 1 \leqq \lambda \leqq \left[\frac{m+n+1}{2}\right], \end{cases}$$

$$c_{\mu m}^{(m+n)} = \begin{cases} c_{\mu}^{(m)} \text{ für } 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{m}{2}\right], \\ 0 \text{ für } \left[\frac{m}{2}\right] + 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{m+n}{2}\right] \end{cases}$$

und

$$d_{\nu m}^{(m+n)} = \begin{cases} d_{\nu}^{(m)} \text{ für } 1 \leqq \nu \leqq \left[\frac{m+1}{2}\right], \\ 0 \text{ für } \left[\frac{m+1}{2}\right] + 1 \leqq \nu \leqq \left[\frac{m+n+1}{2}\right] \end{cases}$$

besitzt, so haben wir die Gesamtheit der komplexen Zahlen m-ter Stufe $Z^{(m)}$ in umkehrbar eindeutiger Weise auf die Gesamtheit der komplexen Zahlen $Z_m^{(m+n)}$ abgebildet, welche ein Teilsystem der komplexen Zahlen $(m+n)$-Stufe bilden.

Diese Zuordnung hat folgende Eigenschaften:

1) Aus $Z_m^{(m+n)} = Z_m'^{(m+n)}$ folgt $Z^{(m)} = Z'^{(m)}$

2) der Summe von $Z_m^{(m+n)}$ und $Z_m'^{(m+n)}$ entspricht die Summe von $Z^{(m)}$ und $Z'^{(m)}$

3) dem Produkt aus $Z_{m_1}^{(m_1+n_1)}$ und $Z_{m_2}^{(m_2+n_2)}$ entspricht das Produkt aus $Z^{(m_1)}$ und $Z^{(m_2)}$.

Da $Z_{2n}^{(2n+1)}$ dadurch in $Z^{(2n)}$ übergeht, daß man in $Z_{2n}^{(2n+1)}$ die beiden verschwindenden Komponenten $b_{n+1,\,2n}^{(2n+1)}$ und $d_{n+1,\,2n}^{(2n+1)}$ streicht, so ist es naheliegend, die reellen Zahlen als komplexe Zahlen nullter Stufe zu bezeichnen. Die komplexe Zahl nullter Stufe $Z^{(0)} = a$ lautet dann als komplexe Zahl erster Stufe geschrieben $Z_{0}^{(1)} = (a, 0, 0)$.

Durch die beschriebene Abbildung des Systems der komplexen Zahlen m-ter Stufe $Z^{(m)}$ auf das Teilsystem $Z_{m}^{(m+1)}$ der komplexen Zahlen $(m+n)$-ter Stufe $Z^{(m+n)}$ ist es möglich geworden, die Definition der Gleichheit und Addition so abzuändern, daß die miteinander zu vergleichenden bzw. zu addierenden komplexen Zahlen endlicher Stufe nicht mehr von gleicher Stufe sein müssen. Sind n_1 und n_2 die Stufen, denen die in Frage kommenden komplexen Zahlen angehören, so braucht man sie nur als komplexe Zahlen n-ter Stufe zu schreiben, wobei n offenbar nicht kleiner als die größere der beiden Zahlen n_1 und n_2 sein darf.

§ 4.

Funktionen von endlich hoher Stufe.

a) Definition der Funktionen von endlich hoher Stufe.

Unter einer Funktion einer komplexen Veränderlichen (x, y, z) von n-ter Stufe $f_n[(x, y, z)]$ verstehen wir ein geordnetes $(2n+1)$-Tupel von Funktionen

$$\begin{gathered}\{t_\varkappa(x, y, z);\ u_\lambda(x, y, z);\ v_\mu(x, y, z);\ w_\nu(x, y, z)\},\\ \left(1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n}{2}\right] + 1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right],\ 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right).\end{gathered} \tag{73}$$

Als Beispiel führen wir $(x, y, z)^n$ an, wobei n eine natürliche Zahl ist. Die Komponentendarstellung dieser Funktion n-ter Stufe lautet

$$\begin{gathered}\{t_\varkappa^{(n)}(x, y, z);\ u_\lambda^{(n)}(x, y, z);\ v_\mu^{(n)}(x, y, z);\ w_\nu^{(n)}(x, y, z)\},\\ \left(1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n}{2}\right] + 1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right],\ 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right),\end{gathered}$$

welches die (t, u, v, w)-Basis für den Grad n ist.

Weitere Beispiele für Funktionen n-ter Stufe liefern die Polynome höchstens n-ten Grades von (x, y, z):

$$p_n[(x, y, z)] = \sum_{\alpha=0}^{n} (a_\varkappa^{(n-\alpha)};\ b_\lambda^{(n-\alpha)};\ c_\mu^{(n-\alpha)};\ d_\nu^{(n-\alpha)})\ (x, y, z)^\alpha,$$

worin

$$\begin{gathered}\{a_\varkappa^{(n-\alpha)};\ b_\lambda^{(n-\alpha)};\ c_\mu^{(n-\alpha)};\ d_\nu^{(n-\alpha)}\},\\ \left(1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n-\alpha}{2}\right] + 1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{n-\alpha+1}{2}\right],\ 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n-\alpha}{2}\right]\right)\end{gathered}$$

eine von (x, y, z) unabhängige Konstante $n-\alpha$)-ter Stufe bedeutet.

Da nach den Gesetzen, welchen das Rechnen mit komplexen Zahlen endlicher Stufe genügt,

$$(x_1-x, y_1-y, z_1-z)\sum_{\alpha=0}^{n}(x_1, y_1, z_1)^{n-\alpha}(x, y, z)^{\alpha} = (x_1, y_1, z_1)^{n+1}-(x, y, z)^{n+1}$$

ist, läßt sich leicht ein Differentialquotient von $(x, y, z)^n$ definieren. Wir setzen

$$\frac{d(x, y, z)^n}{d(x, y, z)} = \lim_{h^2+k^2+l^2\to 0}\frac{(x+h, y+k, z+l)^n-(x, y, z)^n}{(h, k, l)}$$

und erhalten

$$\frac{d(x, y, z)^n}{d(x, y, z)} = n(x, y, z)^{n-1}$$

als Ableitung oder Differentialquotient für $(x, y, z)^n$. Man erkennt auch sofort, daß

$$p_n[(x, y, z)] = p_n[(0, 0, 0)] + \sum_{\beta=1}^{n}\frac{p_n^{(\beta)}[(0, 0, 0)]}{\beta!}(x, y, z)^{\beta}$$

gilt, worin $p_n^{(\beta)}[(0, 0, 0)]$ die β-te Ableitung von $p_n[(x, y, z)]$ an der Stelle $(0, 0, 0)$ ist.

b) *Differenzierbare Funktionen endlicher Stufe.*

Wir wollen nun für beliebige Funktionen endlicher Stufe einen Differenzierbarkeitsbegriff festlegen. Dies geschieht in folgender Weise.

Definition. *Eine Funktion n-ter Stufe $f_n[(x, y, z)]$ heißt an der Stelle (x, y, z) differenzierbar, wenn es eine Funktion $(n-1)$-ter Stufe $f_{n-1}^*[(x, y, z)]$ gibt, so daß für eine hinreichend kleine Umgebung von (x, y, z)*

(74) $$f_n[x+h, y+k, z+l)]-f_n[(x, y, z)] = f_{n-1}^*[(x, y, z)](h, k, l)+\Omega^{(n)}$$

wird, wobei $\Omega^{(n)} = (\alpha_\varkappa^{(n)}, \beta_\lambda^{(n)}, \gamma_\mu^{(n)}, \delta_\nu^{(n)})$ eine Größe n-ter Stufe ist, deren Komponenten Funktionen von x, y, z, h, k und l sind, welche beim Grenzübergang $(h, k, l)\to 0$ von höherer Ordnung als $\sqrt{h^2+k^2+l^2}$ Null werden.

Es sollen zunächst notwendige Bedingungen hergeleitet werden, welchen die Komponenten von $f_n[(x, y, z)]$ genügen müssen, damit $f_n[x, y, z]$ an der Stelle (x, y, z) differenzierbar ist.

Sind $t_\varkappa(x, y, z)$, $u_\lambda(x, y, z)$, $v_\mu(x, y, z)$ und $w_\nu(x, y, z)$ die Komponenten von $f_n[x, y, z]$, ferner $t_\varkappa^*(x, y, z)$, $u_\lambda^*(x, y, z)$, $v_\mu^*(x, y, z)$ und $w_\nu^*(x, y, z)$ die Komponenten von $f_{n-1}^*[x, y, z]$, so folgt aus (74) nach (41)

(75)
$$\begin{aligned} &t_\varkappa(x+h, y+k, z+l)-t_\varkappa(x, y, z)\\ &= T_\varkappa^* h + U_{\varkappa-1}^* k - (W_\varkappa^* + W_{\varkappa-1}^*) l + \alpha_\varkappa^{(n)},\\ &u_\lambda(x+h, y+k, z+l)-u_\lambda(x, y, z)\\ &= U_\lambda^* h + T_\lambda^* k - (V_\lambda^* + V_{\lambda-1}^*) l + \beta_\lambda^{(n)}, \end{aligned}$$

$$v_\mu(x+h, y+k, z+l)-v_\mu(x, y, z) = V_\mu^* h + W_\mu^* k + U_\mu^* l + \gamma_\mu^{(n)}$$

und

$$w_\nu(x+h, y+k, z+l)-w_\nu(x, y, z) = W_\nu^* h + V_{\nu-1}^* k + T_\nu^* l + \delta_\nu^{(n)},$$

worin $1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, $1 \leqq \lambda, \nu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$ und $1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ ist, ferner

$$
\begin{aligned}
T_\alpha^* &= \begin{cases} t_\alpha^*, \text{ wenn } 1 \leqq \alpha \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1, \\ 0 \text{ für alle übrigen } \alpha, \end{cases} \\
U_\beta^* &= \begin{cases} u_\beta^*, \text{ wenn } 1 \leqq \beta \leqq \left[\frac{n}{2}\right], \\ 0 \text{ für alle übrigen } \beta, \end{cases} \\
V_\gamma^* &= \begin{cases} v_\gamma^*, \text{ wenn } 1 \leqq \gamma \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right], \\ 0 \text{ für alle übrigen } \gamma \text{ und} \end{cases} \\
W_\delta^* &= \begin{cases} w_\delta^*, \text{ wenn } 1 \leqq \delta \leqq \left[\frac{n}{2}\right], \\ 0 \text{ für alle übrigen } \delta. \end{cases}
\end{aligned} \tag{76}
$$

Nennt man eine Funktion $\varphi(x, y, z)$ der drei Variablen x, y und z an der Stelle (x, y, z) differenzierbar, wenn es drei Funktionen $\varphi_\nu(x, y, z)$; $\nu = 1, 2, 3$ gibt, so daß für eine hinreichend kleine Umgebung von (x, y, z)

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x + h,\ y + k,\ z + l) - \varphi(x, y, z) \\
&= h\varphi_1(x, y, z) + k\varphi_2(x, y, z) + l\varphi_3(x, y, z) + \omega(x, y, z, h, k, l)
\end{aligned} \tag{77}
$$

ist, wobei ω beim Grenzübergang $(h, k, l) \to 0$ von höherer Ordnung als $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ nach Null konvergiert, also $\lim\limits_{(h,k,l) \to 0} \frac{\omega}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = 0$ ist, dann folgt zunächst aus (75), daß die Kompoenten von $f_n[(x, y, z)]$ differenzierbare Funktionen von x, y und z sind.

Nun ergibt sich aus (77) sofort

$$
\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_2 \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi_3,
$$

was für (75) nach sich zieht, daß die Komponenten von $f_n[(x, y, z)]$ folgendem System partieller Differentialgleichungen genügen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T_\varkappa}{\partial x} = \frac{\partial U_\varkappa}{\partial y} = \frac{\partial W_\varkappa}{\partial z}, \quad \frac{\partial T_\varkappa}{\partial y} = \frac{\partial U_{\varkappa-1}}{\partial x} = \frac{\partial V_{\varkappa-1}}{\partial z}, \\
&\frac{\partial T_\varkappa}{\partial z} = -\frac{\partial W_\varkappa}{\partial x} - \frac{\partial W_{\varkappa-1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_\lambda}{\partial z} = -\frac{\partial V_\lambda}{\partial x} - \frac{\partial V_{\lambda-1}}{\partial x}, \\
&\frac{\partial W_\nu}{\partial x} = \frac{\partial V_\nu}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial W_\nu}{\partial y} = \frac{\partial V_{\nu-1}}{\partial x},
\end{aligned} \tag{78}
$$

wobei $1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, $1 \leqq \lambda, \nu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ist und T_α mit t_α, U_β mit u_β, V_γ mit v_γ und W_δ mit w_δ übereinstimmt, wenn $1 \leqq \alpha \leqq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, $1 \leqq \beta$, $\delta \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$ und $1 \leqq \gamma \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ ist, sonst aber Null sind.

Das partielle Differentialgleichungssystem (78) ist das Analogon zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für Funktionen n-ter Stufe.

Von den beiden für die Differenzierbarkeit von $f_n[(x, y, z)]$ als notwendig erkannten Bedingungen, daß die Komponenten von $f_n[(x, y, z)]$ differenzierbare Funktionen sein müssen, welche noch den partiellen Differentialgleichungen (78) zu genügen haben, läßt sich leicht nachweisen, daß sie auch hinreichend sind.

Bezeichnen wir die Ableitung oder den Differentialquotienten von von $f_n[(x, y, z)]$ mit $f_n'[(x, y, z)]$, so erhält man

$$\frac{\partial f_n[(x, y, z)]}{\partial x} = (1, 0, 0) f_n'[(x, y, z)], \quad \frac{\partial f_n[(x, y, z)]}{\partial y} = (0, 1, 0) f_n'[(x, y, z)]$$

und

$$\frac{\partial f_n[(x, y, z)]}{\partial z} = (0, 0, 1) f_n'[(x, y, z)],$$

was unmittelbar aus (74) folgt.

Auch nach (74) würde man als Differentialquotient von $(x, y, z)^n$ das schon früher erhaltene Ergebnis $n(x, y, z)^{n-1}$ bekommen.

c) *Linienintegral einer Funktion n-ter Stufe* $f_n[(x, y, z)]$.

Zunächst soll erklärt werden, was wir unter dem Linienintegral einer Funktion n-ter Stufe $f_n[(x, y, z)]$ erstreckt längs eines Kurvenstückes $\mathfrak{C}$ mit dem Anfangspunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ und dem Endpunkt $P(x, y, z)$, in Zeichen

$$^{(\mathfrak{C})}\int_{P_0}^{P} f_n[(\xi, \eta, \zeta)]\, d(\xi, \eta, \zeta),$$

verstehen wollen. Man hat die Größe n-ter Stufe $f_n[(\xi, \eta, \zeta)]$ mit der Größe $d(\xi, \eta, \zeta) = (d\xi, d\eta, d\zeta)$ erster Stufe nach (41) zu multiplizieren und erhält so eine Größe $(n+1)$-ter Stufe, deren Komponenten lineare Differentialformen von $d\xi$, $d\eta$ und $d\zeta$ sind, welche man längs des Kurvenstückes $\mathfrak{C}$ vom Anfangspunkt P_0 bis zum Endpunkt P zu integrieren hat.

Über das Linienintegral einer differenzierbaren Funktion n-ter Stufe gilt folgender Satz:

Ist $f_n[(x, y, z)]$ *eine im Bereiche* $\mathfrak{B}: a_1 < x < a_2,\ b_1 < y < b_2,\ c_1 < z < c_2$ *differenzierbare Funktion n-ter Stufe, so verschwindet das Linienintegral* $\oint_{\mathfrak{C}} f_n[(x, y, z)]\, d(x, y, z)$ *längs jeder beliebigen in* $\mathfrak{B}$ *verlaufenden geschlossenen rektifizierbaren Kurve* $\mathfrak{C}$.

Die Richtigkeit dieses Satzes wird sich leicht zeigen lassen, wenn wir folgenden Hilfssatz bewiesen haben werden:

Sind $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ *und* $R(x, y, z)$ *im Bereiche* $\mathfrak{B}$ *differenzierbare Funktionen von* x, y *und* z, *welche in* $\mathfrak{B}$ *den Bedingungen*

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

genügen, dann ist für jede in $\mathfrak{B}$ *verlaufende geschlossene rektifizierbare Kurve* $\mathfrak{C}$

$$\oint P\, dx + Q\, dy + R\, dz = 0.$$

Den Beweis des angeführten Hilfssatzes stützen wir auf sein Analogon in der Ebene, welches lautet: Sind $p(x, y)$ und $q(x, y)$ in

$$\mathfrak{B}' : a_1 < x < a_2, \quad b_1 < y < b_2$$

differenzierbare Funktionen von x und y, welche daselbst der Bedingung $\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}$ genügen, so wird

$$\oint_{\mathfrak{C}} p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0$$

für jede in $\mathfrak{B}'$ verlaufende geschlossene rektifizierbare Kurve $\mathfrak{C}$. Dieser Satz ist das reelle Seitenstück zur Goursatschen Fassung des Cauchyschen Integralsatzes für Funktionen einer komplexen Veränderlichen, bei welcher bloße Existenz der Ableitung und nicht auch deren Stetigkeit verlangt wird.

An Hand der nebenstehenden Figuren wollen wir den Hilfssatz für den Fall beweisen, wo $\mathfrak{C}$ die Berandung eines beliebigen nicht zur x, y-Ebene senkrechten Dreiecks bildet. Der Beweis für den allgemeinen Fall einer beliebigen geschlossenen rektifizierbaren Kurve läßt sich dann nach den üblichen Approximationsmethoden erbringen.

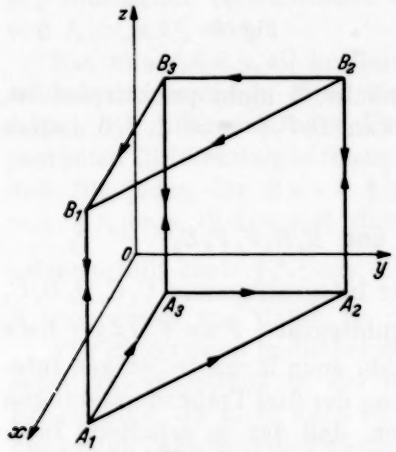

Fig. 4.

In Fig. 4 sind die Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ senkrecht zur z-Achse und die Strecken $A_\nu B_\nu$; $\nu = 1, 2, 3$ parallel zur z-Achse.

Nach dem Analogon des Hilfssatzes für die Ebene hat das Linienintegral $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ längs der aus Strecken bestehenden geschlossenen Integrationswege $A_1A_3A_2A_1$, $B_1B_3B_2B_1$, $A_1A_3B_3B_1A_1$ und $A_2B_2B_3A_3A_2$ den Wert Null. Deshalb ist auch das über den Integrationsweg $A_1A_3A_2B_2B_3B_1A_1$ erstreckte Integral Null, worin die Integrationswege $A_1A_3A_2$ und $B_1B_3B_2$ durch A_1A_2 und B_1B_2 ersetzt werden können. Damit ist der Hilfssatz für solche Integrationswege bewiesen, welche die Berandung von Rechtecken bilden, die wenigstens ein Seitenpaar besitzen, das parallel zu einer der Koordinatenachsen verläuft.

Der Integrationsweg $C_1C_2D_2D_1C_1$ in Fig. 5 ist ein Trapez, dessen Grundlinien C_1D_1 und C_2D_2 parallel der z-Achse sind und von dem der eine Schenkel C_1C_2 parallel der xy-Ebene läuft. Der andere Schenkel D_1D_2 hat keine spezielle Lage im Koordinatensystem. Auch für derartige Integrationswege gilt der zu beweisende Hilfssatz, da sie sich, wie in Fig. 5 veranschaulicht wird, durch Rechtecksberandungen approximieren lassen, welche ein zur z-Achse paralleles Seitenpaar enthalten.

In Fig. 6 ist nun schließlich $F_1 F_2 F_3$ ein beliebiges Dreieck, das nicht zur z-Achse parallel ist und dessen Normalprojektion auf eine zur

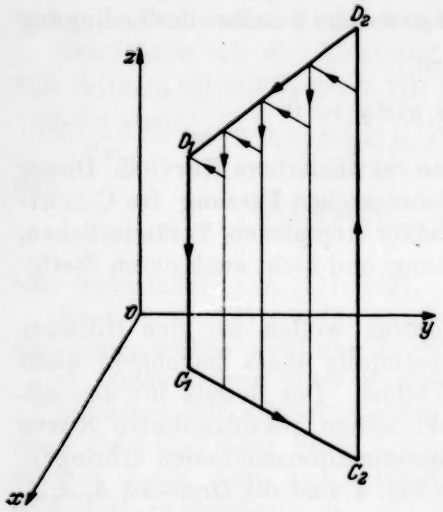

Fig. 5.

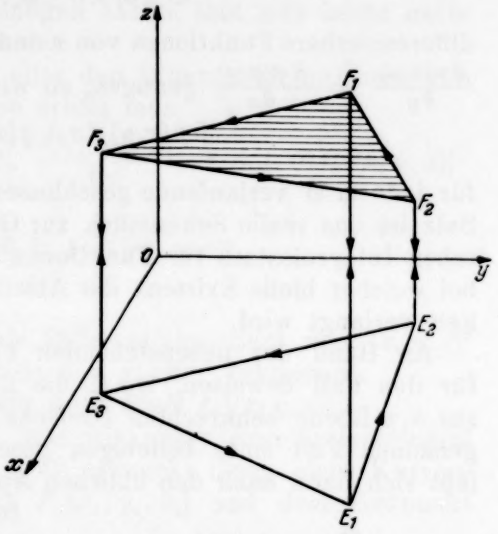

Fig. 6.

xy-Ebene parallele Ebene, die zum Bereiche $\mathfrak{B}$ nicht punktfremd ist, das Dreieck $E_1 E_2 E_3$ ergibt. Die Strecken $E_\nu F_\nu$; $\nu = 1, 2, 3$ laufen also parallel der z-Achse.

Da die Trapezberandungen

$$E_1 E_2 F_2 F_1 E_1, \quad E_2 E_3 F_3 F_2 E_2 \text{ und } E_3 E_1 F_1 F_3 E_3 \tag{79}$$

die gleichen Eigenschaften haben, wie der Integrationsweg $C_1 C_2 D_2 D_1 C_1$ in Fig. 5, so verschwindet auch das Linienintegral $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ längs dieser Trapezberandungen und mithin auch längs desjenigen Integrationsweges, der durch Aneinanderfügung der drei Trapezberandungen (79) entsteht. Fig. 6 läßt leicht erkennen, daß der so erhaltene Integrationsweg demjenigen gleichwertig ist, welcher aus den beiden Dreiecksberandungen $E_1 E_2 E_3 E_1$ und $F_1 F_3 F_2 F_1$ zusammengesetzt ist. Da aber $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ längs $E_1 E_2 E_3 E_1$ den Wert Null hat, weil das Dreieck $E_1 E_2 E_3$ parallel der xy-Ebene ist und deshalb das ebene Analogon des zu beweisenden Hilfssatzes angewendet werden kann, so muß das Linienintegral auch längs des Weges $F_1 F_3 F_2 F_1$ verschwinden.

Da es aber kein Dreieck gibt, welches zu allen drei Koordinatenebenen senkrecht ist, so ist damit der Hilfssatz für beliebige im Bereiche $\mathfrak{B}$ verlaufende Dreiecksberandungen bewiesen.

Jetzt läßt sich leicht die Behauptung unseres Satzes beweisen, daß die Differenzierbarkeit von $f_n[(x, y, z)]$ in einem Bereiche des (x, y, z)-

Raumes hinreichend für das Verschwinden des Linienintegrales

$$\oint_{\mathfrak{C}} f_n[(x,y,z)]\, d(x,y,z)$$

ist, worin $\mathfrak{C}$ eine beliebige in $\mathfrak{B}$ verlaufende geschlossene rektifizierbare Kurve bedeutet.

Nach der Definition des Linienintegrales wird

$$\oint_{\mathfrak{C}} f_n[(x,y,z)]\, d(x,y,z) = \Big\{ \oint_{\mathfrak{C}} T_\alpha\, dx + U_{\alpha-1}\, dy - (W_\alpha + W_{\alpha-1})\, dz;$$

$$\oint_{\mathfrak{C}} U_\beta\, dx + T_\beta\, dy - (V_\beta + V_{\beta-1})\, dz; \quad \oint_{\mathfrak{C}} V_\gamma\, dx + W_\gamma\, dy + U_\gamma\, dz;$$

$$\oint_{\mathfrak{C}} W_\delta\, dx + V_{\delta-1}\, dy + T_\delta\, dz \Big\},$$

$$\left(1 \leqq \alpha \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1,\ 1 \leqq \beta,\ \delta \leqq \left[\frac{n+2}{2}\right],\ 1 \leqq \gamma \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]\right),$$

worin $T_\varkappa$ mit $t_\varkappa$, U_λ mit u_λ, V_μ mit v_μ und W_ν mit w_ν übereinstimmt, wenn

$$1 \leqq \varkappa \leqq \left[\frac{n}{2}\right] + 1,\ 1 \leqq \lambda,\ \nu \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right] \text{ und } 1 \leqq \mu \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$$

ist, sonst aber verschwindet und $t_\varkappa$, u_λ, v_μ und w_ν die Komponenten von $f_n[(x,y,z)]$ sind.

Hat nun $f_n[(x,y,z)]$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ des (x,y,z)-Raumes einen Differentialquotienten, so sind die Komponenten $t_\varkappa$, u_λ, v_μ und w_ν von $f_n[(x,y,z)]$ differenzierbare Funktionen von x, y und z, welche dem partiellen Differentialgleichungssystem (78) genügen. Hieraus folgt aber, daß für jedes der $2n+3$ Linienintegrale, welche die Komponenten von $\oint_{\mathfrak{C}} f_n[(x,y,z)]\, d(x,y,z)$ darstellen, die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt sind. $\oint_{\mathfrak{C}} f_n[(x,y,z)]\, d(x,y,z)$ hat also lauter verschwindende Komponenten und damit ist der Satz bewiesen.

Für Funktionen endlicher Stufe gilt mithin das Analogon des Cauchyschen Integralsatzes in der Goursatschen Fassung. Es liegt nun die Frage nahe, ob nicht auch für Funktionen endlicher Stufe die Existenz des ersten Differentialquotienten in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ des (x,y,z)-Raumes die beliebig oftmalige Differenzierbarkeit in $\mathfrak{B}$ als notwendige Folge nach sich zieht. Ist diese Frage zu bejahen, so wäre die Gesamtheit der differenzierbaren Funktionen endlicher Stufe mit den Polynomen in (x,y,z) identisch.

In einer folgenden Arbeit soll in einem viel umfassenderen Rahmen auch auf diese Fragestellung eingegangen werden.

(Eingegangen am 20. Februar 1947.)

Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen.

Von

H. Westphal in Göttingen.

1. In Verallgemeinerung einer Ungleichung von A. Haar[1]) hat M. Nagumo[2]) einen Satz bewiesen, der die Abschätzung der Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung durch die einer anderen gestattet. Es soll im folgenden gezeigt werden, daß es möglich ist, auch für gewisse parabolische Differentialgleichungen der allgemeinen Form

$$u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}) \tag{1.1}$$

ein Lemma aufzustellen, mit dessen Hilfe auf überraschend einfachem Wege ganz allgemeine Abschätzungssätze für die Lösungen parabolischer Differentialgleichungen hergeleitet werden können.

Die rechte Seite in (1.1) sei dabei eine reelle Funktion der fünf Veränderlichen x, t, u, u_x, u_{xx}, die für jede feste Variablenkombination x, t, u, u_x eine monoton wachsende Funktion von u_{xx} ist. Wir wollen solche Funktionen f im folgenden kurz Funktionen vom Typ T nennen.

Lemma. $f(x, t, u, u_x, u_{xx})$ sei eine Funktion des Typus T. Zugrunde gelegt werde (bei festem $T > 0$) ein Gebiet

$$\mathfrak{B}: \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,$$

dessen obere Randstrecke $0 < x < 1$, $t = T$ mit $\mathfrak{C}_T$, dessen übriger Rand mit $\mathfrak{C}$ bezeichnet werde. $u(x, t)$ und $v(x, t)$ seien in $\mathfrak{B}$ und auf seinem Rande reguläre Lösungen der Differentialungleichungen

$$u_t > f(x, t, u, u_x, u_{xx}) \tag{1.2}$$

$$v_t \leqq f(x, t, v, v_x, v_{xx}). \tag{1.3}$$

Darunter ist zu verstehen, daß u und v in $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{C}_T$ zweidimensional stetig sind, daß $u_x, u_{xx}, u_t, v_x, v_{xx}, v_t$ überall in $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}_T$ existieren, sowie daß schließlich (1.2) und (1.3) überall in $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}_T$ erfüllt werden.

Ist dann überall auf $\mathfrak{C}$

$$v(x, t) < u(x, t). \tag{1.4}$$

so gilt dies auch in ganz $\overline{\mathfrak{B}}$.

---

[1]) A. Haar, Atti Congresso Intern. Bologna 1928, III, p. 5—10.

[2]) M. Nagumo, Japanese Journ. of Math. 15 (1938), p. 51—56.

Zum Beweis werde die Differenzfunktion $u - v = g$ eingeführt, die auf $\mathfrak{C}$ nach Voraussetzung überall > 0 ist. Wir betrachten dann die Menge der $t' \leqq T$, für die es auf der Strecke $0 < x < 1$, $t = t'$ mindestens einen Punkt mit $g \leqq 0$ gibt. Ist sie leer, so haben wir nichts zu beweisen. Ist sie es nicht, so hat sie eine untere Grenze $\bar{t}$.

Wir behaupten nun, daß es dann ein $\bar{x}$ mit $0 < \bar{x} < 1$ und $g(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ geben muß. Aus der Definition von $\bar{t}$ folgt nämlich, daß eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}_T$ mit $g(x_\nu, t_\nu) \leqq 0$ und $t_\nu \to \bar{t}$ angegeben werden kann. Aus dieser läßt sich wegen der Beschränktheit der x eine Teilfolge auswählen, die gegen einen bestimmten Punkt $\overline{P}(\bar{x}, \bar{t})$ konvergiert. Wegen der vorausgesetzten zweidimensionalen Stetigkeit von g in $\overline{\mathfrak{B}}$ gilt dann $g(\bar{x}, \bar{t}) \leqq 0$. Das besagt wegen (1.4), daß $\overline{P}$ nicht auf $\mathfrak{C}$ liegt, insbesondere nicht auf der unteren Begrenzung von $\mathfrak{B}$. Es ist also möglich, durch Annäherung an $\overline{P}$ von kleineren t-Werten her aus der Stetigkeit von g auf $g(\bar{x}, \bar{t}) \geqq 0$ und somit auf $g(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ zu schließen.

Aus der vorausgesetzten Existenz von

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(\bar{x}, \bar{t} + h) - g(\bar{x}, \bar{t})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(\bar{x}, \bar{t} + h)}{h} = g_t(\bar{x}, \bar{t})$$

folgt dann durch Benutzung negativer h-Werte $g_t(\bar{x}, \bar{t}) \leqq 0$.

Wegen der Stetigkeit von g ist ferner $g(x, \bar{t}) \geqq 0$ auf der ganzen Strecke $0 < x < 1$. Da $\overline{P}$ nicht auf $\mathfrak{C}$ liegt, kann analog aus der Existenz von g_x und g_{xx} geschlossen werden, daß

$$g_x(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \quad \text{und} \quad g_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \geqq 0.$$

Für die Lösungsfunktionen u und v gelten also in $\overline{P}$ die Relationen

$$v = u \qquad v_x = u_x \qquad v_{xx} \leqq u_{xx}$$

und

$$v_t \geqq u_t. \tag{1.5}$$

Aus (1.3) und (1.2), angeschrieben für $\overline{P}$, folgt aber

$$v_t \leqq f(x, t, v, v_x, v_{xx}) = f(x, t, u, u_x, u_{xx}) \leqq f(x, t, u, u_x, u_{xx}) < u_t$$

im Widerspruch zu (1.5), womit das Lemma bewiesen ist.

Man sieht übrigens sofort, daß es zum Beweise ausreicht, wenn an jedem Punkt von $\mathfrak{B}$ in irgendeiner der Ungleichungen (1.2), (1.3) kein Gleichheitszeichen steht. Ferner ist es klar, daß man das Lemma auch für sehr viel allgemeinere Gebiete aussprechen kann.

2. Über die Abhängigkeit der Lösungen parabolischer Differentialgleichungen von den vorgeschriebenen Randwerten läßt sich nun folgender Satz beweisen

Satz 1. Es seien $u(x,t)$ und $U(x,t)$ überall im Gebiet

$$\mathfrak{B}: \quad 0<x<1, \quad 0<t<T$$

und auf seinem Rande reguläre Lösungen der Differentialungleichungen

$$|u_t - f(x,\, t,\, u,\, u_x,\, u_{xx})| \leqq \varepsilon_1 \tag{2.1}$$

$$|u_t - f(x,t,U,U_x,U_{xx})| \leqq \varepsilon_2. \tag{2.2}$$

Die Differenz der Randwerte von u und U sei beschränkt

$$|u-U| \leqq A \qquad \text{auf } \mathfrak{C}. \tag{2.3}$$

Die Funktion sei vom Typus T, außerdem seien in dem in Betracht kommenden Variablenbereich ihre Differenzen in bezug auf u beschränkt

$$|f(x,t,u_2,u_x,u_{xx}) - f(x,t,u_1,u_x,u_{xx})| \leqq B. \tag{2.4}$$

Dann gilt in ganz $\bar{\mathfrak{B}}$

$$|u-U| \leqq A + (B+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,t. \tag{2.5}$$

Zum Beweis wird die Differenzfunktion $U-u=g$ betrachtet. Sie genügt der Differentialungleichung

$$\begin{aligned} g_t &\leqq f(x,t,U,U_x,U_{xx}) + \varepsilon_2 - f(x,t,u,u_x,u_{xx}) + \varepsilon_1 \\ &= f(x,t,u,u_x+g_x,u_{xx}+g_{xx}) - f(x,t,u,u_x,u_{xx}) \\ &\quad + f(x,t,u+g,u_x+g_x,u_{xx}+g_{xx}) \\ &\quad - f(x,t,u,u_x+g_x,u_{xx}+g_{xx}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ &\leqq B + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + f(x,t,u,u_x+g_x,u_{xx}+g_{xx}) - f(x,t,u,u_x,u_{xx}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nun erfüllt aber bei beliebigem $\varepsilon>0$ die Hilfsfunktion

$$G = A + \varepsilon + (B+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon)\,t$$

trivialerweise die Differentialungleichung

$$G_t > B + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + f(x,t,u,u_x+G_x,u_{xx}+G_{xx}) - f(x,t,u,u_x,u_{xx}).$$

Da außerdem wegen (2.3) überall auf $\mathfrak{C}$ die Differenzfunktion $g<G$ ist und auch alle anderen Bedingungen des Lemmas erfüllt sind (denn die rechte Seite von (2.6) ist eine monoton zunehmende Funktion von g_{xx}), können wir aus dem Lemma schließen, daß überall in $\bar{\mathfrak{B}}$

$$g < G = A + \varepsilon + (B+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon)\,t$$

ist. Lassen wir u und U die Rollen vertauschen, so folgt analog

$$-g < A + \varepsilon + (B+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon)\,t;$$

beides zusammengenommen ergibt für $\varepsilon \to 0$ die Behauptung (2.5).

Der Satz läßt sich ohne weiteres auf allgemeinere Gebiete verallgemeinern, es ist ferner möglich, in konkret gegebenen Fällen bessere Majorantenfunktionen G zu finden.

3. Ein Eindeutigkeitsbeweis für die nichtlineare parabolische Differentialgleichung (1.1) läßt sich aus Satz 1 nicht ablesen. Es erweist sich dazu als nötig, eine weitergehende Voraussetzung über die Funktion $f(x, t, u, u_x, u_{xx})$ einzuführen. Wir erhalten dann den folgenden

Satz 2. Ist $f(x, t, u, u_x, u_{xx})$ eine Funktion vom Typus T, die in bezug auf u einer LIPSCHITZ-Bedingung genügt

$$(3.1) \quad |f(x, t, u_2, u_x, u_{xx}) - f(x, t, u_1, u_x, u_{xx})| \leqq M |u_2 - u_1|,$$

so gibt es bei vorgeschriebenen Randwerten höchstens eine in ganz $\overline{\mathfrak{B}}$ reguläre Lösung von (1.1).

Nehmen wir zum Beweise an, es gäbe zwei Lösungen u und U von (1.1), die zu den gleichen Randwerten gehören. Die Differenzfunktion $U - u = g$ verschwindet dann auf $\mathfrak{C}$ und genügt der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} g_t = {} & f(x, t, u+g, u_x+g_x, u_{xx}+g_{xx}) - f(x, t, u, u_x+g_x, u_{xx}+g_{xx}) \\ & + f(x, t, u, u_x+g_x, u_{xx}+g_{xx}) - f(x, t, u, u_x, u_{xx}), \end{aligned}$$

aus der die Ungleichung

$$g_t \leqq M|g| + f(x, t, u, u_x+g_x, u_{xx}+g_{xx}) - f(x, t, u, u_x, u_{xx})$$

folgt. Alle Bedingungen des Lemmas sind erfüllt, wenn wir bei beliebigem $\varepsilon > 0$

$$G = \varepsilon e^{(M+\varepsilon)t}$$

wählen, denn G erfüllt die Differentialungleichung

$$G_t > M|G| + f(x, t, u, u_x + G_x, u_{xx} + G_{xx}) - f(x, t, u, u_x, u_{xx}).$$

So ergibt sich die Abschätzung

$$(3.2) \quad |u - U| < \varepsilon e^{(M+\varepsilon)t} \quad \text{in } \overline{\mathfrak{B}},$$

aus der durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ die Behauptung sofort zu gewinnen ist.

Ist die LIPSCHITZ-Bedingung (3.1) nicht erfüllt, so wird man Eindeutigkeit der Lösung im allgemeinen nicht mehr erwarten dürfen. Ein Beispiel dafür gibt die Gleichung

$$(3.3) \quad u_t = \left(\pi^2 + \frac{2}{t}\right) u + u_{xx},$$

welche im Grundgebiete $\mathfrak{B}$ zwei Lösungen

$$u_1 = t^2 \sin \pi x \qquad u_2 = 0$$

besitzt, die beide auf $\mathfrak{C}$ verschwinden.

Andererseits ist die LIPSCHITZ-Bedingung (3.1) nur hinreichend, nicht notwendig für Eindeutigkeit der Lösung. Als Beispiel dafür, wie sie

durch andere, weniger enge Bedingungen für Eindeutigkeit ersetzt werden kann, diene

Satz 3. Ist $f(x, t, u, u_x, u_{xx})$ eine Funktion vom Typus T, die eine Differenzenabschätzung nach u

$$|f(x, t, u_1, u_x, u_{xx}) - f(x, t, u_2, u_x, u_{xx})| \leqq h(t)\,|u_1 - u_2| \tag{3.4}$$

mit einer stetigen, positivwertigen Funktion $h(t)$ zuläßt, für die das Integral

$$\int_0^t h(\tau)\,d\tau \tag{3.5}$$

existiert, so gibt es bei vorgeschriebenen Randwerten höchstens eine in ganz $\overline{\mathfrak{B}}$ reguläre Lösung von (1.1).

Als charakteristische Differentialungleichung ergibt sich hier

$$g_t \leqq h(t)\,|g| + f(x, t, u, u_x + g_x, u_{xx} + g_{xx}) - f(x, t, u, u_x, u_{xx});$$

als Majorantenfunktion kann

$$G = \varepsilon\, e^{\int_0^t h(\tau)\,d\tau + \varepsilon t}$$

gewählt werden.

Im Beispiel (3.3) ist das Integral (3.5) gerade nicht mehr konvergent.

4. Es möge zum Schluß noch eine Abschätzung hergeleitet werden, die erkennen läßt, wie mit zunehmender Breite des Grundgebietes der Einfluß der links und rechts vorgegebenen Randwerte auf den Wert der Lösungsfunktion in einem festgehaltenen inneren Punkte des Grundgebietes immer geringer wird. Genauer ergibt sich der folgende

Satz 4. Es seien $u(x, t)$ und $v(x, t)$ zwei im ganzen Gebiet

$$\mathfrak{B}_A: \qquad -A < x < A, \quad 0 < t < T, \quad A > 0 \text{ konstant}$$

und auf seinem Rande reguläre Lösungen der Differentialgleichungen (1.1), die auf dem unteren Rand gleiche Werte annehmen, während ihre Werte auf den Seitenrändern sich um höchstens $R > 0$ unterscheiden. $f(x, t, u, u_x, u_{xx})$ sei eine Funktion vom Typus T, die einer Lipschitz-Bedingung

$$\begin{aligned} &|f(x, t, u', u'_x, u'_{xx}) - f(x, t, u'', u''_x, u''_{xx})| \\ &\leqq M[|u' - u''| + |u'_x - u''_x| + |u'_{xx} - u''_{xx}|] \end{aligned} \tag{4.1}$$

genügt.

Es gilt dann in ganz $\overline{\mathfrak{B}}_A$ die Abschätzung

$$|u - v| \leqq \tfrac{4}{3} R\, e^{4Mt - (A - |x|)}. \tag{4.2}$$

Zum Beweise wird aus der Gleichung

$$g_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}) - f(x, t, v, v_x, u_{xx}) + f(x, t, v, v_x, u_{xx}) - f(x, t, v, v_x, v_{xx})$$

für die Differenz $u - v = g$ mit Hilfe von (4.1) und unter Benutzung

der Voraussetzung, daß $f(x, t, u, u_x, u_{xx})$ vom Typus T ist, die Differentialungleichung

$$g_t \leqq M(|g| + 2|g_x| + \delta(g_{xx}) \cdot g_{xx})$$

abgeleitet, wobei $\delta(x)$ durch

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

definiert ist. Die rechte Seite genügt allen Bedingungen des Lemmas, ist z. B. eine monoton zunehmende Funktion von g_{xx}.

Nun läßt sich leicht verifizieren, daß für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$G(x, t) = R\, e^{(4M+\varepsilon)t - A}(e^{|x|} + \tfrac{1}{3} e^{-3|x|})$$

eine in ganz $\overline{\mathfrak{B}}_A$ reguläre Funktion ist, die der Differentialungleichung

$$G_t > M(|G| + 2|G_x| + \delta(G_{xx}) \cdot G_{xx})$$

genügt und auf dem Rand $> g$ ist. Aus dem Lemma kann dann die Abschätzung

$$g < R\, e^{(4M+\varepsilon)t - A}(e^{|x|} + \tfrac{1}{3} e^{-3|x|}) \leqq \tfrac{4}{3} R\, e^{(4M+\varepsilon)t - A + |x|}$$

erschlossen werden. Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ sowie Vertauschung von u und v führen dann zur Ungleichung (4. 2).

Selbstverständlich ist (4. 2) nur eine rohe Abschätzung, die stark verbessert werden kann. Sie gibt aber schon einen erwünschten Überblick.

(Eingegangen am 11. 8. 1947.)

Minimalfolgen und das Dirichletsche Prinzip.

Von

G. G. Lorentz in Tübingen.

In den folgenden Zeilen soll eine wesentliche Ergänzung zu der Arbeit von E. Kamke und dem Verfasser, Über das Dirichletsche Prinzip, Math. Zeitschrift 51 (1948), S. 217—232 (weiter als DP zitiert) gegeben werden. Und zwar zeigen wir, daß die in DP, § 4 behandelten Eigenschaften der Minimalfolgen auch ohne die Voraussetzung der Lösbarkeit der Randwertaufgabe bestehen bleiben.

Wir betrachten die erste Randwertaufgabe $\Delta u = 0$ für ein beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}$ des p-dimensionalen Raumes: Auf dem Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ sei eine stetige Funktion $f(\mathfrak{x})$ gegeben; es wird eine in $\mathfrak{G}+\mathfrak{R}$ stetige, in $\mathfrak{G}$ harmonische Funktion $u(\mathfrak{x})$ gesucht, die auf $\mathfrak{R}$ mit $f(\mathfrak{x})$ übereinstimmt.

Die geschilderte Randwertaufgabe hat nicht immer eine Lösung. Es existiert aber stets eine verallgemeinerte Lösung $u(\mathfrak{x})$ im Sinne von N. Wiener[1]), die durch die folgende Eigenschaft gekennzeichnet werden kann: Es gibt eine stetige Fortsetzung $F(\mathfrak{x})$ von $f(\mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{G}+\mathfrak{R}$ und eine aufsteigende Folge $\mathfrak{G}_n$ von regulären Gebieten[2]) mit $\sum \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_n + \mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{G}_{n+1}$ ($\mathfrak{R}_n$ ist der Rand des Gebietes $\mathfrak{G}_n$) derart, daß für die (gewöhnliche) Lösung $u_n(\mathfrak{x})$ der ersten Randwertaufgabe für $\mathfrak{G}_n$ mit den Randwerten $F(\mathfrak{x})$ die Grenzbeziehung gilt

$$\lim_{n\to\infty} u_n(\mathfrak{x}) = u(\mathfrak{x}) \tag{1}$$

gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{G}$. (Die Funktion $u(\mathfrak{x})$ ist von der Wahl der Gebiete $\mathfrak{G}_n$ und der Fortsetzung $F(\mathfrak{x})$ unabhängig.)

In der oben zitierten Arbeit DP wurde der Zusammenhang zwischen der Randwertaufgabe und der Variationsaufgabe

$$D_{\mathfrak{G}}(v) = \int_{\mathfrak{G}} \sum_{k=1}^{n} v_{x_k}^2(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} = \text{Min} \tag{2}$$

geklärt und der folgende Satz bewiesen:

Satz A. *Im Bereich der zulässigen Funktionen $v(\mathfrak{x})$ mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$ ist die Variationsaufgabe* (2) *genau dann lösbar, wenn die Randwertaufgabe es ist, und die Lösungen der beiden Aufgaben sind*

[1]) N. Wiener, Journ. of Math. and Phys. Massachusetts, 3, 24—51 (1924).

[2]) Ein Gebiet $\mathfrak{G}$ heißt regulär, wenn für $\mathfrak{G}$ jede erste Randwertaufgabe mit stetigen Randwerten lösbar ist. Jedes Gebiet $\mathfrak{G}$ läßt sich im oben angegebenen Sinne durch reguläre Gebiete $\mathfrak{G}_n$ approximieren.

identisch[3]). Es wird dabei vorausgesetzt, daß es zulässige Funktionen $v(\mathfrak{x})$ mit Randwerten $f(\mathfrak{x})$ gibt.

Dabei heißt eine Funktion $v(\mathfrak{x})$ zulässig, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(α) $v(\mathfrak{x})$ ist stetig in $\mathfrak{G}+\mathfrak{R}$,

(β) die Ableitungen v_{x_k} existieren in $\mathfrak{G}$ höchstens mit Ausnahme einer Menge, die ein endliches $(p-1)$-dimensionales Carathéodorysches Maß hat,

(γ) $D(v)$ ist endlich.

Eine Folge $v_n(\mathfrak{x})$ von zulässigen Funktionen heißt eine Minimalfolge, falls $D_{\mathfrak{G}}(v_n)$ gegen die untere Grenze $d = \inf D_{\mathfrak{G}}(v)$ (v durchläuft alle zulässigen Funktionen) konvergiert.

Unter der Annahme der Existenz der zulässigen Funktionen mit vorgeschriebenen Randwerten — eine Annahme, die für die Anwendbarkeit der Variationsmethode unerläßlich ist — beweisen wir den folgenden

Satz B. *Jede Minimalfolge $v_n(\mathfrak{x})$ konvergiert im Mittel gegen eine harmonische Funktion $u(\mathfrak{x})$:*

$$\|v_n - u\| = \Big\{\int_{\mathfrak{G}} [v_n(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x})]^2\, d\mathfrak{x}\Big\}^{\frac{1}{2}} \to 0. \tag{3}$$

Es gibt Minimalfolgen, die in jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{G}$ gegen $u(\mathfrak{x})$ gleichmäßig konvergieren; und die Funktion $u(\mathfrak{x})$ ist die Wienersche Lösung des Randwertproblems mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$.

Beweis. (a) Für eine Minimalfolge v_n sind die Funktionen

$$v_n,\ v_m,\ \tfrac{1}{2}(v_n + v_m)$$

für beliebige n, m zulässige Funktionen mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$. Daher gilt

$$0 \leqq D\Big(\frac{v_n - v_m}{2}\Big) = \frac{1}{2} D(v_n) + \frac{1}{2} D(v_m) - D\Big(\frac{v_n + v_m}{2}\Big)$$
$$\leqq \frac{1}{2} D(v_n) + \frac{1}{2} D(v_m) - d \to 0$$

für $n, m \to \infty$. Nach DP, Hilfssatz 1 ergibt sich daraus

$$\|v_n - v_m\| \to 0,$$

also ist v_n im Mittel gegen eine quadratisch integrierbare Funktion u konvergent, die von der Wahl der Folge v_n nicht abhängt.

(b) Um jetzt von dieser Minimalfolge v_n zu einer gleichmäßig konvergenten Folge zu gelangen, wählen wir eine Folge von Gebieten $\mathfrak{G}_n$ der am Anfang der Note erwähnten Art. $u_n(\mathfrak{x})$ sei die Lösung der

[3]) Aus Satz A folgt, daß die bekannte von Weierstrass kritisierte Schlußweise Riemanns nicht nur formal falsch ist, sondern auch zu einem falschen Ergebnis führt. Denn es gibt unlösbare Randwertaufgaben, sogar solche, für die $f(\mathfrak{x})$ zu einer zulässigen Funktion erweitert werden kann (vgl. Courant-Hilbert, Methoden der mathem. Physik. Bd. 2 (1937), S. 272—273), also auch unlösbare Variationsaufgaben (2).

Randwertaufgabe für $\mathfrak{G}_n$ mit den Randwerten $v_n(\mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{R}_n$. Wir setzen $\bar{v}_n(\mathfrak{x}) = u_n(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{G}_n$, $= v_n(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_n$. Nach Satz A ist $D_{\mathfrak{G}_n}(\bar{v}_n) \leqq D_{\mathfrak{G}_n}(v_n)$, und daher

$$D_{\mathfrak{G}}(\bar{v}_n) \leqq D_{\mathfrak{G}}(v_n).$$

Auch $\bar{v}_n$ ist also eine Minimalfolge.

Es sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ abgeschlossen und ϱ_1 der Abstand von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{R}$. Für jedes $0 < \varrho < \varrho_1$ und hinreichend große $n \geqq n_0$ ist die ϱ-Umgebung der Menge $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}_n$ enthalten. In dieser Umgebung ist $\bar{v}_n(\mathfrak{x})$ mit $u_n(\mathfrak{x})$ identisch. Daher gilt für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{K}_\varrho(\mathfrak{x})$ die offene Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ und dem Radius ϱ und $|\mathfrak{K}_\varrho|$ ihr Volumen bedeutet,

$$\bar{v}_n(\mathfrak{x}) = u_n(\mathfrak{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{K}|} \int\limits_{\mathfrak{K}_\varrho(\mathfrak{x})} u_n(\mathfrak{y})\, d\mathfrak{y}, \qquad n \geqq n_0.$$

Daraus folgt für $n, m \geqq n_0$

$$|u_n(\mathfrak{x}) - u_m(\mathfrak{x})|^2 = \left| \frac{1}{|\mathfrak{K}_\varrho|} \int\limits_{\mathfrak{K}_\varrho(\mathfrak{x})} [u_n(\mathfrak{y}) - u_m(\mathfrak{y})]\, d\mathfrak{y} \right|^2$$

$$\leqq \frac{1}{|\mathfrak{K}_\varrho|^2} |\mathfrak{K}_\varrho| \int\limits_{\mathfrak{K}_\varrho} (u_n - u_m)^2\, d\mathfrak{y} \leqq \frac{1}{|\mathfrak{K}_\varrho|} \|\bar{v}_n - \bar{v}_m\| \to 0$$

gleichmäßig für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$. Da die $u_n(x)$ harmonisch sind, ist auch ihr Grenzwert $u(\mathfrak{x})$ harmonisch.

(c) Wir zeigen zuletzt, daß dieses u die Wienersche Lösung der Randwertaufgabe ist. Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ von (b) werden jetzt speziell so gewählt, daß für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}_n$ ein $\mathfrak{y} \in \mathfrak{R}$ vorhanden ist mit den beiden Eigenschaften

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}| < \frac{1}{n}, \quad |v_n(\mathfrak{x}) - v_n(\mathfrak{y})| < \frac{1}{n}. \tag{4}$$

Unsere Behauptung wird bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß eine in $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$ stetige Funktion $F(\mathfrak{x})$ existiert, die auf $\mathfrak{R}_n$ mit $v_n(\mathfrak{x})$ für $n = 1, 2, \ldots$ und auf $\mathfrak{R}$ mit $f(\mathfrak{x})$ zusammenfällt. Nach dem Satz von Tietze über die Fortsetzung einer stetigen Funktion genügt es zu zeigen, daß

$$F(\mathfrak{x}) = \begin{cases} v_n(\mathfrak{x}) & \text{für } \mathfrak{x} \in \mathfrak{R}_n, \quad n = 1, 2, \ldots \\ f(\mathfrak{x}) & \text{für } \mathfrak{x} \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

auf der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{A} = \mathfrak{R} + \sum \mathfrak{R}_n$ stetig ist. Die Stetigkeit von $F(\mathfrak{x})$ in einem Punkt $\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}_n$ besteht nach der Voraussetzung. Es sei jetzt $\mathfrak{x}_k \to \mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_k \in \mathfrak{A}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}$. Wir dürfen offenbar $\mathfrak{x}_k \bar{\in} \mathfrak{R}$ annehmen. Dann gehört jedes $\mathfrak{x}_k$ einem $\mathfrak{R}_n$ mit $n = n(k)$ an; und es strebt $n(k) \to \infty$ für $k \to \infty$. Es sei $\mathfrak{y}_k \in \mathfrak{R}$ ein dem Punkt $\mathfrak{x}_k$ gemäß (4) entsprechender Punkt. Es strebt $\mathfrak{y}_k \to \mathfrak{x}$ und daher $F(\mathfrak{y}_k) = f(\mathfrak{y}_k) \to F(\mathfrak{x})$. Daraus ergibt sich sofort in Verbindung mit (4)

$$|F(\mathfrak{x}_k) - F(\mathfrak{x})| \leqq |F(\mathfrak{x}_k) - F(\mathfrak{y}_k)| + |F(\mathfrak{y}_k) - F(\mathfrak{x})| \leqq \frac{1}{n(k)} + |F(\mathfrak{y}_k) - F(\mathfrak{x})| \to 0,$$

womit der Satz B bewiesen ist.

Es sei noch bemerkt, daß eine Minimalfolge nicht zu konvergieren braucht: *Für jedes Gebiet $\mathfrak{G}$ und jede erste Randwertaufgabe gibt es eine überall divergente Minimalfolge.*

Denn es ist leicht (vgl. COURANT-HILBERT, Mathem. Physik, Bd. 1, 2. Aufl. (1931), S. 157) für ein $0 < \delta < 1$ und einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}_0$ des p-dimensionalen Raumes $\mathfrak{E}$ eine den Bedingungen (α), (β), (γ) genügende Funktion $w(\mathfrak{x}) = w(\mathfrak{x}; \delta, \mathfrak{x}_0)$ anzugeben, derart, daß $w(\mathfrak{x}) = 0$ für $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \geqq \sqrt{\delta}$, $= 1$ für $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \leqq \delta$ ist und daß $D_{\mathfrak{E}}(w) = \varphi(\delta)$ mit δ gegen Null strebt.

Es sei $\mathfrak{K}_{\delta_1}(\mathfrak{x}_1)$, $\mathfrak{K}_{\delta_2}(\mathfrak{x}_2)$, ... eine Folge von Kugeln mit $\delta_k \to 0$, so daß jeder Punkt $\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}$ unendlich vielen Kugeln angehört und daß sogar jede Kugel $\mathfrak{K}_{\sqrt{\delta_k}}(\mathfrak{x}_k)$ in $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Zu solchen $\mathfrak{K}_{\delta_k}(\mathfrak{x}_k)$ kommt man, wenn man wieder die Gebietsfolge $\mathfrak{G}_n$ benutzt, mit $\varrho_n > 0$ den Abstand von $\mathfrak{G}_n$ bis zum Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ bezeichnet, $\mathfrak{G}_n + \mathfrak{R}_n$ durch endlich viele Kugeln vom Radius ϱ_n^2 überdeckt und diese Kugeln in eine Folge ordnet.

Für die Minimalfolge u_k des Satzes B ist dann

$$v_k(\mathfrak{x}) = u_k(\mathfrak{x}) + w(\mathfrak{x}; \delta_k, \mathfrak{x}_k)$$

offenbar eine in $\mathfrak{G}$ überall divergierende Minimalfolge.

Zusatz bei der Korrektur (Januar 1949).

Natürlich sind die unter (a) und (b) benutzten Schlüsse auch auf andere Aufgaben als die erste Randwertaufgabe anwendbar. Man kommt so zu dem folgenden Satz, der auf andere Weise in einer inzwischen erschienenen Note von L. AHLFORS[4]) bewiesen ist:

Es sei Γ eine Menge von Funktionen $v(\mathfrak{x})$, die in $\mathfrak{G}$ erklärt und stetig sind und (β) und (γ) erfüllen. Es gehöre ferner mit je zwei Funktionen v, v_1 auch $\frac{1}{2}(v + v_1)$ zu Γ und mit einem v auch jede stetige Funktion v_1, die (β) und (γ) erfüllt und von v nur auf einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ verschieden ist. Dann ist jede Minimalfolge v_n im Mittel gegen eine harmonische Funktion u konvergent und für dieses u gilt $D(u) = d$ und $D(v_n - u) \to 0$.

In der Tat, es genügt $D_{\mathfrak{G}}(\bar{v}_n - u) \to 0$ für die $\bar{v}_n$ von (b) zu beweisen. Da auf einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ die Funktionen u und $\bar{v}_n$, $(n \geqq n_0)$ harmonisch sind und $\bar{v}_n(\mathfrak{x}) \to u(\mathfrak{x})$ gleichmäßig strebt, ist dort auch $\frac{\partial}{\partial x_k} \bar{v}_n \to \frac{\partial u}{\partial x_k}$ gleichmäßig konvergent für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$. Andererseits konvergiert nach (a) $\frac{\partial}{\partial x_k} \bar{v}_n$ im Mittel auf $\mathfrak{G}$; es ist also $\left\| \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_n - u) \right\| \to 0$ und daraus folgt $D_{\mathfrak{G}}(\bar{v}_n - u) \to 0$.

[4]) L. AHLFORS, Das DIRICHLETsche Prinzip, Math. Annalen **120** (1947), 36—42; vgl. auch L. AHLFORS, Die Begründung des DIRICHLETschen Prinzips, Soc. Sci. Fenn. Comment Phys.-Math. **11**. Nr. 15, (1943) 15 S. Bei AHLFORS sind übrigens die zulässigen Funktionen stetig differentiierbar.

(Eingegangen am 13. 7. 1947.)

Winkeltreue und Streckentreue bei konformer Abbildung Riemannscher Räume.

Von

Hermann Schmidt in Braunschweig.

Der Beweis, daß eine winkeltreue Abbildung zweier Flächen von selbst eine streckentreue ist, d. h. daß in ein und demselben Punkt das Längenvergrößerungsverhältnis in jeder Richtung das gleiche ist, die Fundamentalgrößen 1. Ordnung proportional sind, wird — während das umgekehrte ohne weiteres aus einer elementaren Rechnung folgt — gewöhnlich durch „anschauliche" infinitesimalgeometrische Überlegungen erbracht, die allzu leicht den Charakter bloßer Plausibilitätsbetrachtungen annehmen. Die Frage nach einem einwandfreien analytischen Beweis wurde in einem Seminar von Herrn R. König aufgeworfen (Jena 1939), ein solcher dann in der Arbeit gegeben: R. König und K. H. Weise, Zur konformen Abbildung zweier Flächen mit beliebigen Parametern, Ber. Sächs. Akad. Wiss. Math. Phys. Kl. 92 (1940) 19—32, insb. 22—23; eine hierzu noch nötige kleine Ergänzung findet sich in dem in Vorbereitung befindlichen Buche der gleichen Verfasser: Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie. Der folgende Beweis ist von jenem völlig verschieden und früher entstanden; er hat den Vorzug, sich gleich auf den n-dimensionalen Fall zu beziehen und vor allem die Winkeltreue nur für die Winkel zwischen n linear unabhängigen Richtungen sowie die n Winkel einer weiteren Richtung mit diesen zu fordern. Genau gesagt, beweisen wir folgenden

Satz. Die Umgebungen der Punkte P_0, P_0' der Riemannschen Räume $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ mit den Linienelementen ds, dS, wo

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta, \quad dS^2 = {}'g_{\alpha\beta}\, d'u^\alpha\, d'u^\beta,$$

mögen durch ${}'u^\alpha = {}'u^\alpha(u^1, \ldots, u^n)$ — wo die Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial\, {}'u^\alpha}{\partial\, u^\beta}\right)$ in der Umgebung von $P_0(u_0^\alpha)$ stetig, ihre Determinante dort von Null verschieden sei — derart aufeinander abgebildet sein, daß die $\binom{n}{2}$ Winkel der Parameterlinien, sowie die n Winkel einer von je $n-1$ ihrer Tangenten linear unabhängigen Richtung mit diesen der Größe nach erhalten bleiben. Dann ist das Längenvergrößerungsverhältnis $\frac{dS}{ds}$ in P_0 von der Richtung unabhängig.

Beweis. Durch Einführung der Parameter u^α auf $\mathfrak{R}'$ möge die Darstellung $dS^2 = G_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$ hervorgehen. Wir betrachten nun zwei stetig differenzierbare Bögen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, die von P_0 ausgehen und mit der jeweiligen Bogenlänge s als Parameter durch $u^\alpha = u^\alpha(s)$ und $u^\alpha = v^\alpha(s)$ gegeben seien. Der Zwischenwinkel ist, wenn wir durch Punkte die Differentiation nach s andeuten, im übrigen von jetzt an auf die Kennzeichnung in P_0 gebildeter Größen durch Zeiger o verzichten, gegeben durch

$$\cos\vartheta = g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{v}^\beta,$$

der Bildwinkel durch

$$\cos\Theta = G_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{dS}\frac{dv^\beta}{dT} = G_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{v}^\beta : \dot{S}\dot{T},$$

wenn

$$\dot{S}^2 = G_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta, \quad \dot{T}^2 = G_{\alpha\beta}\dot{v}^\alpha\dot{v}^\beta,$$

so daß also $\dot{S}, \dot{T}$ die Abbildungsverhältnisse auf $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{d}$ sind. Nun sei

1. $\mathfrak{c} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}_\nu$ eine Parameterlinie $u^\alpha = u^\alpha_\nu(s)$, so daß $\dot{u}^\alpha_\nu(0) = 0$ für $\alpha \neq \nu$. In P_0 wird dann $\dot{S}^2_\nu = G_{\nu\nu}(\dot{u}_\nu)^2 = G_{\nu\nu} : g_{\nu\nu}$.

2. $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_\nu$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}_\mu$, $\mu \neq \nu$. Dann wird nach Voraussetzung in P_0

$$g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha_\nu\dot{u}^\beta_\mu = G_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha_\nu\dot{u}^\beta_\mu : \dot{S}_\nu\dot{S}_\mu, \quad G_{\nu\mu} = g_{\nu\mu}\dot{S}_\nu\dot{S}_\mu.$$

3. $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_\nu$, $\mathfrak{d}$ beliebig, doch $\dot{v}^\alpha \neq 0$ für $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ (was geometrisch bedeutet, daß $\mathfrak{d}$ keine der n Parameterhyperflächen berührt). Dann wird nach Voraussetzung in P_0

$$g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha_\nu\dot{v}^\beta\dot{S}_\nu\dot{T} = G_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha_\nu\dot{v}^\beta,$$

und daher nach 1.2.

$$g_{\nu\beta}\dot{v}^\beta\dot{T} = (g_{\nu\beta}\dot{S}_\beta)\,.\,\dot{v}^\beta \quad \text{oder} \quad g_{\nu\beta}(\dot{T} - \dot{S}_\beta)\,.\,\dot{v}^\beta = 0.$$

Da nun $\det(g_{\nu\beta}) \neq 0$ und alle $\dot{v}^\beta \neq 0$, folgt hieraus $\dot{S}_\beta = \dot{T}$ für alle β in P_0. Es ist also dort $G_{\mu\nu} = \dot{S}^2 g_{\mu\nu}$ für alle μ, ν, w. z. b. w.

(Eingegangen am 23. November 1947.)

Zur Mathematik der Diracmatrizen: Die Bargmannsche Hermitisierungsmatrix A und die Paulische Transpositionsmatrix B.

Von

W. Kofink.

Einleitung und Zusammenfassung.

In der allgemein relativistischen Formulierung der Diracschen Theorie des Elektrons von W. Pauli[1]) treten zwei Matrizen A und B von besonderen Eigenschaften auf. Die Matrix A hat die Eigenschaft, als Transformationsmatrix ein vorliegendes System von Diracmatrizen in das hermiteisch konjugierte zu verwandeln. Sie wurde zuerst von V. Bargmann[2]) eingeführt; ihre Existenz ist von Wichtigkeit bei der Bildung reeller Dichteausdrücke in jener Theorie. Die Matrix B hat die Eigenschaft, als Transformationsmatrix ein vorliegendes System von Diracmatrizen in das transponierte zu verwandeln. Sie wurde zuerst von W. Pauli eingeführt; ihre Existenz ist bei der Ableitung von zweien der vier Differentialrelationen von Bedeutung, welche in der Diracschen Theorie des Elektrons aus der Realität der elektromagnetischen Potentiale[3]) entspringen. Der Zweck der vorliegenden Mitteilung ist, die beiden Matrizen A und B für jedes beliebige System von Diracmatrizen darzustellen. Auf dem Weg dazu ergibt sich eine gegen Matrizenaustausch invariante Kombination von zweireihigen Unterdeterminanten (Gl. 7) im Diracschen Matrixring, welche eng mit B verwandt ist.

§ 1.

Bezeichnungen.

Es bedeuten die ε^μ ($\mu = 1, 2, 3, 4, 5$) ein beliebiges System von Diracmatrizen; sie befriedigen die Grundrelationen

$$\varepsilon^\mu \varepsilon^\nu + \varepsilon^\nu \varepsilon^\mu = 2\,\delta_{\mu\nu}\,.\,I \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5)$$
$$\varepsilon^5 = \varepsilon^1 \varepsilon^2 \varepsilon^3 \varepsilon^4. \tag{1}$$

Zusammen mit der Einheitsmatrix I und den Grundmatrizen ε^μ bilden die 10 Zweierprodukte $\varepsilon^\mu \varepsilon^\nu$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5$; $\mu \neq \nu$) einen Matrixring von 16 Matrizen.

---

[1]) W. Pauli, Annalen der Physik [5]. **18**, S. 354 (1933).

[2]) V. Bargmann, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. Berlin 1932, S. 346.

[3]) W. Kofink, Annalen der Physik [5], **38**, S. 565, 583 (1940).

Es ist bequem, den Zweierprodukten die imaginäre Einheit hinzuzufügen

$$\varepsilon^{[\mu\nu]} = i\,\varepsilon^{\mu}\,\varepsilon^{\nu}$$

und die vier Produkte mit der Matrix ε^5 gesondert als Dreierprodukte zu schreiben, nämlich

$$\varepsilon^{[15]} = \varepsilon^{[234]},\quad \varepsilon^{[25]} = \varepsilon^{[314]},\quad \varepsilon^{[35]} = \varepsilon^{[124]},\quad \varepsilon^{[45]} = -\varepsilon^{[123]},$$

wobei vor den Dreierprodukten wiederum die imaginäre Einheit steht, also z. B. $\varepsilon^{[123]} = i\,\varepsilon^1\varepsilon^2\varepsilon^3$ bedeutet. $\sum_{[\mu\nu]}$ kennzeichnet die Summation über alle 10 Zweierprodukte; $\sum_{[\lambda\mu\nu]}$ kennzeichnet die Summation über die vier Dreierprodukte und $\sum_{[\lambda\mu]}$ die Summation über die sechs Zweierprodukte ohne die Mitwirkung der Matrix ε^5.

Der obere Index j durchläuft alle 16 Matrizen des Matrixrings und $\sum_{j=1}^{16}$ bedeutet Summation über alle Matrizen des vollen Matrixringes. Untere Indices kennzeichnen die Matrixelemente.

Durch Überstreichen einer Matrix wird das Kippen um die Diagonale (Transposition), durch einen Stern das konjugiert Komplexe, durch ein Kreuz das hermiteisch Konjugierte angedeutet.

§ 2.

Ableitung von Invarianten gegen Permutation der ε^μ.

Ausgehend von einer durch W. Pauli[4]) abgeleiteten Identität für die Matrixelemente des Diracschen Matrixringes

$$\sum_{j=1}^{16} \varepsilon^{j}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{j}_{\bar\varrho\bar\sigma} = 4\,\delta_{\bar\varrho\sigma}\,\delta_{\varrho\bar\sigma} \tag{2}$$

d. h. ausgeschrieben

$$\delta_{\varrho\sigma}\,\delta_{\bar\varrho\bar\sigma} + \sum_{\mu=1}^{4} \varepsilon^{\mu}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\bar\varrho\bar\sigma} + \varepsilon^{5}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\bar\varrho\bar\sigma} + \sum_{[\lambda\mu]} \varepsilon^{[\lambda\mu]}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{[\lambda\mu]}_{\bar\varrho\bar\sigma} + \sum_{[\lambda\mu\nu]} \varepsilon^{[\lambda\mu\nu]}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar\varrho\bar\sigma} = 4\,\delta_{\bar\varrho\sigma}\,\delta_{\varrho\bar\sigma} \tag{2a}$$

folge ich zunächst dem in jener Arbeit eingeschlagenen Weg, ersetze $\bar\varrho, \bar\sigma$ durch $\bar{\bar\varrho}, \bar{\bar\sigma}$, multipliziere mit $\varepsilon^5_{\bar\varrho\bar{\bar\varrho}}\,\varepsilon^5_{\bar{\bar\sigma}\bar\sigma}$ und summiere über $\bar{\bar\varrho}, \bar{\bar\sigma}$ von 1 bis 4. Dies bedeutet eine Multiplikation aller zweiten Matrizen mit ε^5 von vorn und hinten. Dabei kehrt sich auf Grund der Relationen (1) das Vorzeichen der Hälfte der Summanden auf der linken Seite von (2a) um:

$$\delta_{\varrho\sigma}\,\delta_{\bar\varrho\bar\sigma} - \sum_{\mu=1}^{4} \varepsilon^{\mu}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\bar\varrho\bar\sigma} + \varepsilon^{5}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\bar\varrho\bar\sigma} + \sum_{[\lambda\mu]} \varepsilon^{[\lambda\mu]}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{[\lambda\mu]}_{\bar\varrho\bar\sigma} - \sum_{[\lambda\mu\nu]} \varepsilon^{[\lambda\mu\nu]}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar\varrho\bar\sigma} = 4\,\varepsilon^{5}_{\bar\varrho\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\varrho\bar\sigma}. \tag{2b}$$

Also zerfällt die Identität (2) in zwei Teile, nämlich

$$\delta_{\varrho\sigma}\,\delta_{\bar\varrho\bar\sigma} + \varepsilon^{5}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\bar\varrho\bar\sigma} + \sum_{[\lambda\mu]} \varepsilon^{[\lambda\mu]}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{[\lambda\mu]}_{\bar\varrho\bar\sigma} = 2\,[\delta_{\bar\varrho\bar\sigma}\,\delta_{\varrho\bar\sigma} + \varepsilon^{5}_{\bar\varrho\bar\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\varrho\bar\sigma}] \tag{3}$$

[4]) W. Pauli, Pieter Zeeman Verhandelingen 1935, S. 31.

und

$$\sum_{\mu=1}^{4} \varepsilon^{\mu}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} + \sum_{[\lambda\mu\nu]} \varepsilon^{[\lambda\mu\nu]}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} = 2\,[\delta_{\bar{\varrho}\sigma}\,\delta_{\varrho\bar{\sigma}} - \varepsilon^{5}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\varrho\bar{\sigma}}]. \tag{4}$$

Ersetzt man nun in (3) die Indices ϱ durch $\bar{\bar{\varrho}}$, $\bar{\varrho}$ durch $\bar{\bar{\bar{\varrho}}}$, multipliziert mit $\varepsilon^{[123]}_{\varrho\bar{\bar{\varrho}}}\,\varepsilon^{[123]}_{\bar{\varrho}\bar{\bar{\bar{\varrho}}}}$ und summiert über $\bar{\bar{\varrho}}, \bar{\bar{\bar{\varrho}}}$ von 1 bis 4, was eine Multiplikation aller Matrizen von vorn mit $\varepsilon^{[123]}$ bedeutet, so erhält man eine Vorzeichenumkehr der Dreierprodukte gegenüber (4)

$$\sum_{\mu=1}^{4} \varepsilon^{\mu}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \sum_{[\lambda\mu\nu]} \varepsilon^{[\lambda\mu\nu]}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} = 2\,[\varepsilon^{4}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{4}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{4}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{4}_{\varrho\bar{\sigma}} - (\varepsilon^{[123]}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{[123]}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{[123]}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{[123]}_{\varrho\bar{\sigma}})]. \tag{5}$$

Dies zu (4) addiert, ergibt

$$\sum_{\mu=1}^{4} \varepsilon^{\mu}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} = \delta_{\bar{\varrho}\sigma}\,\delta_{\varrho\bar{\sigma}} - \varepsilon^{5}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\varrho\bar{\sigma}} + \varepsilon^{4}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{4}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{4}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{4}_{\varrho\bar{\sigma}} - (\varepsilon^{[123]}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{[123]}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{[123]}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{[123]}_{\varrho\bar{\sigma}})$$

oder mit $\varepsilon^{[123]} = -\varepsilon^{[45]} = -i\,\varepsilon^{4}\,\varepsilon^{5}$ in Zweierprodukte umgeschrieben

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=1}^{5} \varepsilon^{\mu}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} &= \delta_{\bar{\varrho}\sigma}\,\delta_{\varrho\bar{\sigma}} + (\varepsilon^{4}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{4}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{4}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}\,\varepsilon^{4}_{\varrho\bar{\sigma}}) + (\varepsilon^{5}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{5}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\varrho\bar{\sigma}}) \\ &\quad + [(\varepsilon^{4}\,\varepsilon^{5})_{\varrho\sigma}\,(\varepsilon^{4}\,\varepsilon^{5})_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - (\varepsilon^{4}\,\varepsilon^{5})_{\bar{\varrho}\sigma}\,(\varepsilon^{4}\,\varepsilon^{5})_{\varrho\bar{\sigma}}].\end{aligned} \tag{6}$$

Die linke Seite von (6) ist gegenüber einer beliebigen Umtaufe der ε^{μ} invariant; da durch eine solche höchstens das Vorzeichen von ε^{5} geändert wird, bleibt das Vorzeichen sogar des Summanden $\varepsilon^{5}_{\varrho\bar{\sigma}}\,\varepsilon^{5}_{\bar{\varrho}\sigma}$ erhalten. Also muß auch die rechte Seite von (6) *gegen eine beliebige Umtaufe der ε^{μ} invariant* sein, d. h. der Ausdruck

$$\begin{aligned}J_{\varrho\sigma,\,\bar{\varrho}\bar{\sigma}} &= (\varepsilon^{\mu}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\varrho\bar{\sigma}}) + (\varepsilon^{\nu}_{\varrho}\,\varepsilon^{\nu}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{\nu}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{\nu}_{\varrho\bar{\sigma}}) \\ &\quad + [(\varepsilon^{\mu}\,\varepsilon^{\nu})_{\varrho\sigma}\,(\varepsilon^{\mu}\,\varepsilon^{\nu})_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - (\varepsilon^{\mu}\,\varepsilon^{\nu})_{\bar{\varrho}\sigma}\,(\varepsilon^{\mu}\,\varepsilon^{\nu})_{\varrho\bar{\sigma}}]\end{aligned} \tag{7}$$

ist *von μ, ν unabhängig* ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5$; $\mu \neq \nu$). Daraus folgt für $\mu \neq \nu \neq \lambda$ z. B.

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{\mu}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\varrho\bar{\sigma}} - (\varepsilon^{[\mu\nu]}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{[\mu\nu]}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{[\mu\nu]}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{[\mu\nu]}_{\varrho\bar{\sigma}}) \\ &\qquad = \varepsilon^{\lambda}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\lambda}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{\lambda}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{\lambda}_{\varrho\bar{\sigma}} - (\varepsilon^{[\lambda\nu]}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{[\lambda\nu]}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{[\lambda\nu]}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{[\lambda\nu]}_{\varrho\bar{\sigma}}).\end{aligned} \tag{8}$$

Diese Relationen sind nicht trivial, wenn $\varrho \neq \bar{\varrho}$, $\sigma \neq \bar{\sigma}$. Sie betreffen die $\binom{4}{2}^2 = 36$ zweireihigen Unterdeterminanten, welche man aus den Matrixelementen der vierreihigen DIRACmatrizen bilden kann.

§ 3.

Darstellung der Bargmannschen Hermitisierungsmatrix.

Die BARGMANNsche Matrix A verwandelt ein vorliegendes System DIRACscher Matrizen in das hermiteisch konjugierte

$$(\varepsilon^{\mu})^{\dagger} = A\,\varepsilon^{\mu}\,A^{-1}. \qquad \mu = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{9}$$

Die hermiteisch Konjugierte eines Zweierprodukts

$$(9\,a) \qquad (\varepsilon^{[\mu\nu]})^\dagger = (i\,\varepsilon^\mu\,\varepsilon^\nu)^\dagger = -i\,(\varepsilon^\nu)^\dagger\,(\varepsilon^\mu)^\dagger = -i\,A\,\varepsilon^\nu\,A^{-1}\,A\,\varepsilon^\mu\,A^{-1}$$
$$= -i\,A\,\varepsilon^\nu\,\varepsilon^\mu\,A^{-1} = A\,\varepsilon^{[\mu\nu]}\,A^{-1}$$

bekommt man durch dieselbe Transformation. Für ein schon hermiteisches System ist A natürlich die Einheitsmatrix; für ein beliebiges System kann man A aus Gl. (2) finden. Dazu schreibt man in (2) $\bar{\bar{\varrho}}$ statt $\bar{\varrho}$, $\bar{\bar{\sigma}}$ statt $\bar{\sigma}$, multipliziert mit $A_{\bar{\varrho}\bar{\bar{\varrho}}}\,A^{-1}_{\bar{\bar{\sigma}}\bar{\sigma}}$ und summiert über $\bar{\bar{\varrho}}$ und $\bar{\bar{\sigma}}$, berücksichtigt in dem entstehenden Ausdruck

$$(10) \qquad \sum_{j=1}^{16} \varepsilon^j_{\varrho\sigma}\,(A\,\varepsilon^j\,A^{-1})_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} = 4\,A_{\bar{\varrho}\sigma}\,A^{-1}_{\varrho\bar{\sigma}}$$

Gleichung (9) und (9 a), setzt $\bar{\sigma} = \varrho$ und summiert über ϱ; man findet

$$(11\,a) \qquad 4\,A_{\bar{\varrho}\sigma}\,Sp\,(A^{-1}) = \sum_{j=1}^{16} (\varepsilon^{j\dagger}\,\varepsilon^j)_{\bar{\varrho}\sigma} = \sum_{j=1}^{16} \sum_{\varrho=1}^{4} \varepsilon^{j*}_{\varrho\bar{\varrho}}\,\varepsilon^j_{\varrho\sigma}$$

und nach Gleichsetzen von $\bar{\varrho} = \sigma$ und Summieren über σ

$$(12) \quad S_1 = 4\,Sp\,(A)\,Sp\,(A^{-1}) = \sum_{j=1}^{16} \sum_{\sigma=1}^{4} (\varepsilon^{j\dagger}\,\varepsilon^j)_{\sigma\sigma} = \sum_{j=1}^{16} \sum_{\varrho,\,\sigma=1}^{4} \varepsilon^{j*}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^j_{\varrho\sigma}$$
$$= \sum_{j=1}^{16} \sum_{\varrho,\,\sigma=1}^{4} |\varepsilon^j_{\varrho\sigma}|^2.$$

Das Zeichen Sp bedeutet die Spur, d. h. die Summe der Diagonalelemente. Der Ausdruck (12) ist positiv definit; für schon hermiteische Systeme ist er 64.

Setzt man in (10) $\bar{\varrho} = \sigma$ und summiert über σ, so entsteht der zu (11 a) analoge Ausdruck für die Reziproke A^{-1}

$$(11\,b) \qquad 4\,A^{-1}_{\varrho\bar{\sigma}}\,Sp\,(A) = \sum_{j=1}^{16} (\varepsilon^j\,\varepsilon^{j\dagger})_{\varrho\bar{\sigma}}.$$

Da A durch (9) nur bis auf eine Konstante definiert ist, so kann man zur Erfüllung von $A\,A^{-1} = I$ statt (11 a) und (11 b) unter Berücksichtigung von (12) auch

$$(13) \qquad A = \frac{1}{2\sqrt{S_1}}\left\{I + \sum_{\mu=1}^{5} (\varepsilon^{\mu\dagger}\,\varepsilon^\mu) + \sum_{[\mu\nu]} (\varepsilon^{[\mu\nu]\dagger}\,\varepsilon^{[\mu\nu]})\right\},$$
$$A^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{S_1}}\left\{I + \sum_{\mu=1}^{5} (\varepsilon^\mu\,\varepsilon^{\mu\dagger}) + \sum_{[\mu\nu]} (\varepsilon^{[\mu\nu]}\,\varepsilon^{[\mu\nu]\dagger})\right\}$$

schreiben. Dies ist eine Darstellung der Bargmannschen Matrix samt ihrer Reziproken in jedem beliebigen System von Diracmatrizen.

§ 4.

Beziehung der invarianten Unterdeterminanten zur Matrix B.

Die Matrix B ist diejenige Matrix, welche als Transformationsmatrix das System der ε^μ gemeinsam transponiert

$$(14) \qquad \overline{\varepsilon^\mu} = B\,\varepsilon^\mu\,B^{-1} \qquad \mu = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Für die Matrixelemente von B gilt die bilineare Relation — siehe l. c.[5]) S. 426, Gl. (10) —

$$2B_{\bar\sigma\sigma}B^{-1}_{\bar\varrho\varrho} = (\delta_{\varrho\sigma}\delta_{\bar\varrho\bar\sigma} - \delta_{\bar\varrho\sigma}\delta_{\varrho\bar\sigma}) + (\varepsilon^4_{\varrho\sigma}\varepsilon^4_{\bar\varrho\bar\sigma} - \varepsilon^4_{\bar\varrho\sigma}\varepsilon^4_{\varrho\bar\sigma}) + (\varepsilon^5_{\varrho\sigma}\varepsilon^5_{\bar\varrho\bar\sigma} - \varepsilon^5_{\bar\varrho\sigma}\varepsilon^5_{\varrho\bar\sigma}) + [(\varepsilon^4\varepsilon^5)_{\varrho\sigma}(\varepsilon^4\varepsilon^5)_{\bar\varrho\bar\sigma} - (\varepsilon^4\varepsilon^5)_{\bar\varrho\sigma}(\varepsilon^4\varepsilon^5)_{\varrho\bar\sigma}]. \tag{15}$$

Auf der rechten Seite dieser Relation steht der in § 2 als Invariante gegen Umtaufe der ε^μ erkannte Ausdruck (7). Also kann man (15) allgemeiner schreiben: $(\mu \neq \nu)$

$$2B_{\bar\sigma\sigma}B^{-1}_{\bar\varrho\varrho} = (\delta_{\varrho\sigma}\delta_{\bar\varrho\bar\sigma} - \delta_{\bar\varrho\sigma}\delta_{\varrho\bar\sigma}) + (\varepsilon^\mu_{\varrho\sigma}\varepsilon^\mu_{\bar\varrho\bar\sigma} - \varepsilon^\mu_{\bar\varrho\sigma}\varepsilon^\mu_{\varrho\bar\sigma}) + (\varepsilon^\nu_{\varrho\sigma}\varepsilon^\nu_{\bar\varrho\bar\sigma} - \varepsilon^\nu_{\bar\varrho\sigma}\varepsilon^\nu_{\varrho\bar\sigma}) + [(\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)_{\varrho\sigma}(\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)_{\bar\varrho\bar\sigma} - (\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)_{\bar\varrho\sigma}(\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)_{\varrho\bar\sigma}]. \tag{16}$$

Gl. (16) führt zu einer allgemeingültigen Darstellung der Matrix B. Ersetzt man nämlich dort ϱ durch $\bar{\bar\varrho}$, multipliziert mit $(\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)_{\varrho\bar{\bar\varrho}}$ und summiert über $\bar{\bar\varrho}$, so entsteht

$$2B_{\bar\sigma\sigma}(\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu B^{-1})_{\varrho\bar\varrho} = (\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)_{\varrho\sigma}\delta_{\bar\varrho\bar\sigma} - \delta_{\bar\varrho\sigma}(\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)_{\varrho\bar\sigma} - \delta_{\varrho\sigma}(\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)_{\bar\varrho\bar\sigma} + (\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)_{\bar\varrho\sigma}\delta_{\varrho\bar\sigma} - \varepsilon^\nu_{\varrho\sigma}\varepsilon^\mu_{\bar\varrho\bar\sigma} + \varepsilon^\mu_{\bar\varrho\sigma}\varepsilon^\nu_{\varrho\bar\sigma} + \varepsilon^\mu_{\varrho\sigma}\varepsilon^\nu_{\bar\varrho\bar\sigma} - \varepsilon^\nu_{\bar\varrho\sigma}\varepsilon^\mu_{\varrho\bar\sigma}, \tag{17}$$

welches nach Gleichsetzen von $\bar\varrho = \varrho$ und Summieren über ϱ übergeht in

$$2B_{\bar\sigma\sigma}\cdot\sum_{\varrho=1}^{4}(\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu B^{-1})_{\varrho\varrho} = 2\{(\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)_{\bar\sigma\sigma} - \overline{(\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)}_{\bar\sigma\sigma} + \overline{(\varepsilon^\nu\varepsilon^\mu)}_{\bar\sigma\sigma} - \overline{(\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu)}_{\bar\sigma\sigma}\}$$

oder nach Multiplikation mit i

$$B\,.\,\mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1}) = \varepsilon^{[\mu\nu]} - \overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} + i\,(\overline{\varepsilon^\nu\varepsilon^\mu} - \overline{\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu}) \qquad (\mu \neq \nu). \tag{18}$$

Da die Spur auf der linken Seite eine gewöhnliche Zahl ist, so hat man damit eine Darstellung der Matrix B gewonnen, wenn $\mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1})$ nicht zufällig verschwindet:

$$\begin{aligned} B &= c_{\mu\nu}\{\varepsilon^{[\mu\nu]} - \overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} + i\,(\overline{\varepsilon^\nu\varepsilon^\mu} - \overline{\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu})\} \\ &= i\,c_{\mu\nu}\{(\varepsilon^\mu - \overline{\varepsilon^\mu})\,\varepsilon^\nu + \overline{\varepsilon^\nu}\,(\varepsilon^\mu - \overline{\varepsilon^\mu})\} \end{aligned} \qquad \mu,\nu = 1 \text{ bis } 5;\ \mu \neq \nu. \tag{19}$$

mit

$$c_{\mu\nu} = \frac{1}{\mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1})} = -\,c_{\nu\mu}.$$

Beim Vertauschen von μ und ν ändert sich das Vorzeichen der rechten Seite von (18) gleichzeitig mit dem der Spur links; B bleibt ungeändert. In (19) besitzt man 10 Darstellungen von B, so lange $\mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1}) \neq 0$ ist. Statt der zweiten Gl. (19) kann man unter Vertauschen von μ und ν auch schreiben

$$B = i\,c_{\nu\mu}\{(\varepsilon^\nu - \overline{\varepsilon^\nu})\,\varepsilon^\mu) + \overline{\varepsilon^\mu}\,(\varepsilon^\nu - \overline{\varepsilon^\nu})\} \tag{19a}$$

[5]) W. Kofink, Annalen der Physik [5], **38**, S. 421 (1940).

und erkennt, daß die in geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke in (19) bzw. (19a) verschwinden, wenn eines der ε symmetrisch ist oder beide symmetrisch sind, wenn also z. B. $\overline{\varepsilon^{\mu}} = \varepsilon^{\mu}$ ist. Dann muß auch $\mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]} B^{-1}) = 0$ sein, da B eine von der Nullmatrix sicher verschiedene Matrix ist. Die Darstellung von B mit Hilfe symmetrischer ε ist also nicht erlaubt.

Eine weniger elegante Darstellung von B kann man finden, wenn man von (6) den Ausdruck abzieht, welchen man aus (6) durch Vertauschen von ϱ mit $\overline{\varrho}$ erhält. Dann entsteht

$$\begin{aligned}(20)\qquad &\delta_{\varrho\sigma}\,\delta_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \delta_{\bar{\varrho}\sigma}\,\delta_{\varrho\bar{\sigma}} + \sum_{\mu=1}^{5} (\varepsilon^{\mu}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\varrho\bar{\sigma}}) \\ &= 2\{(\varepsilon^{4}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{4}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{4}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{4}_{\varrho\bar{\sigma}}) + (\varepsilon^{5}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{5}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\varrho\bar{\sigma}}) + [(\varepsilon^{4}\varepsilon^{5})_{\varrho\sigma}\,(\varepsilon^{4}\varepsilon^{5})_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - (\varepsilon^{4}\varepsilon^{5})_{\bar{\varrho}\sigma}\,(\varepsilon^{4}\varepsilon^{5})_{\varrho\bar{\sigma}}]\}.\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (15) führt zu

$$(21)\qquad 4\,B_{\sigma\bar{\sigma}}\,B^{-1}_{\varrho\bar{\varrho}} = 3(\delta_{\varrho\sigma}\,\delta_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \delta_{\bar{\varrho}\sigma}\,\delta_{\varrho\bar{\sigma}}) + \sum_{\lambda=1}^{5} (\varepsilon^{\mu}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - \varepsilon^{\mu}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{\mu}_{\varrho\bar{\sigma}}).$$

Dieselbe Prozedur, die von (16) zu (18) führt, läßt aus (21) eine zweite Darstellung von B entstehen, nämlich

$$(22)\qquad 4B\,.\,\mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]} B^{-1}) = 3\,(\varepsilon^{[\mu\nu]} - \overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}}) + \sum_{\lambda=1}^{5} \overline{\varepsilon^{\lambda}}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]} - \overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}})\,\varepsilon^{\lambda}.$$

Bis hieher wurde von der Invarianten kein Gebrauch gemacht. Subtrahiert man nun dreimal die Gl. (18), so ergibt sich

$$(23)\qquad B\,.\,\mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]} B^{-1}) = 3\,i\,(\overline{\varepsilon^{\mu}}\,\varepsilon^{\nu} - \overline{\varepsilon^{\nu}}\,\varepsilon^{\mu}) + \sum_{\lambda=1}^{5} \overline{\varepsilon^{\lambda}}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]} - \overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}})\,\varepsilon^{\lambda}$$

und nach Herausziehen der Glieder $\lambda = \mu$ und $\lambda = \nu$ aus der Summe über λ

$$(24)\qquad B = c_{\mu\nu}\{i\,(\overline{\varepsilon^{\mu}}\,\varepsilon^{\nu} - \overline{\varepsilon^{\nu}}\,\varepsilon^{\mu}) + \sum_{\lambda=1}^{5\prime} \overline{\varepsilon^{\lambda}}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]} - \overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}})\,\varepsilon^{\lambda}\}.$$

Der Strich am Summenzeichen soll darauf hinweisen, daß in ihr die zwei Glieder $\lambda = \mu$ und $\lambda = \nu$ wegzulassen sind.

Für die Reziproke B^{-1} gewinnt man aus (16) durch Multiplikation des ersten Faktors B mit $\varepsilon^{\mu}\,\varepsilon^{\nu}$ auf ganz analogem Weg

$$(25)\qquad B^{-1}\,.\,\mathrm{Sp}\,(B\varepsilon^{[\mu\nu]}) = \varepsilon^{[\mu\nu]} - \overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} + i\,(\varepsilon^{\nu}\,\overline{\varepsilon^{\mu}} - \varepsilon^{\mu}\,\overline{\varepsilon^{\nu}}), \qquad (\mu \neq \nu)$$

woraus, wenn $\mathrm{Sp}\,(B\varepsilon^{[\mu\nu]}) \neq 0$ ist,

$$\begin{aligned}B^{-1} &= d_{\mu\nu}\{\varepsilon^{[\mu\nu]} - \overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} + i\,(\varepsilon^{\nu}\,\overline{\varepsilon^{\mu}} - \varepsilon^{\mu}\,\overline{\varepsilon^{\nu}})\} \\ &= i\,d_{\mu\nu}\{\varepsilon^{\mu}\,(\varepsilon^{\nu} - \overline{\varepsilon^{\nu}}) + (\varepsilon^{\nu} - \overline{\varepsilon^{\nu}})\,\overline{\varepsilon^{\mu}}\} \\ &= i\,d_{\nu\mu}\{\varepsilon^{\nu}\,(\varepsilon^{\mu} - \overline{\varepsilon^{\mu}}) + (\varepsilon^{\mu} - \overline{\varepsilon^{\mu}})\,\overline{\varepsilon^{\nu}}\}\end{aligned} \qquad (26)$$

mit

$$d_{\mu\nu} = \frac{1}{\mathrm{Sp}\,(B\,\varepsilon^{[\mu\nu]})} = -\,d_{\nu\mu} \qquad (\mu, \nu = 1 \text{ bis } 5;\quad \mu \neq \nu)$$

folgt.

§ 5.

Sonderfall.

Wenn die ε^μ Symmetrien besitzen, so ist dies nur auf die eine Weise möglich, daß drei Grundmatrizen symmetrisch und zwei antisymmetrisch sind. Dann ist nur das antisymmetrische Matrizenpaar zur Darstellung von B nach (19) und B^{-1} nach (26) zu gebrauchen. Dieser Sonderfall liegt bei der üblichen Definition der Matrizen α und γ in der Diracschen Theorie des Elektrons vor. Dort wird z. B. $\alpha^1, \alpha^3, \alpha^4$ symmetrisch, α^2 und α^5 antisymmetrisch gewählt. Die Matrix B ist dann das Produkt der beiden antisymmetrischen Matrizen[6]) und wird in passender Normierung

$$B = B^{-1} = i\alpha^2\alpha^5 = i\alpha^3\alpha^1\alpha^4 = \alpha^{[314]}. \tag{27}$$

Bei meiner Ableitung der vier Differentialrelationen (l. c.[3]) Seite 584), die aus der Realität der elektromagnetischen Potentiale in der Diracschen Theorie hervorgehen, habe ich diese Matrix mit dem Buchstaben T bezeichnet. Zwei jener Relationen ließen sich dort in e i n e komplexe Relation unter Verwendung der Matrix T zusammenfassen. Sie lautete

$$\left(\psi, T\frac{\partial\psi}{c\,\partial t}\right) - \sum_{\varkappa=1}^{3}\left(\psi, T\alpha^\varkappa\frac{\partial\psi}{\partial x_\varkappa}\right) = 0. \tag{28}$$

In ihr hat T also den Wert von B in (27). Bei der Umwandlung in deutbare Größen erkennt man, daß in (28) nicht lineare, sondern zwei — in den deutbaren physikalischen Größen der Diracschen Theorie — bilineare Relationen enthalten sind. Diese Umwandlung geschah in l. c.[3]) Seite 597 ff. mit den dortigen Relationen (16) und (17) als Ergebnis.

§ 6.

Darstellung der Matrix B im Allgemeinfall.

Da je einer der 10 Koeffizienten $c_{\mu\nu}$ bzw. $d_{\mu\nu}$ sicher von Null verschieden ist, erhält man einen allgemeingültigen Ausdruck für B bzw. B^{-1} durch Summieren von (18) bzw. (25) über alle Zweierkombinationen $[\mu\nu]$ $(\mu \neq \nu)$; die Spursummen

$$\frac{1}{c} = \sum_{[\mu\nu]} \mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1}) = \sum_{[\mu\nu]}\frac{1}{c_{\mu\nu}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{d} = \sum_{[\mu\nu]}\mathrm{Sp}\,(B\,\varepsilon^{[\mu\nu]}) = \sum_{[\mu\nu]}\frac{1}{d_{\mu\nu}}$$

sind sicher von Null verschieden. Also gilt ohne Rücksicht auf eventuelle Symmetrien der ε^μ

$$\begin{aligned} B &= c\,.\sum_{[\mu\nu]}\left\{\varepsilon^{[\mu\nu]} - \overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} + i\left(\varepsilon^\nu\,\overline{\varepsilon^\mu} - \varepsilon^\mu\,\overline{\varepsilon^\nu}\right)\right\} \\ B^{-1} &= d\,.\sum_{[\mu\nu]}\left\{\varepsilon^{[\mu\nu]} - \overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} + i\left(\overline{\varepsilon^\nu}\,\varepsilon^\mu - \overline{\varepsilon^\mu}\,\varepsilon^\nu\right)\right\}. \end{aligned} \tag{29}$$

[6]) W. Kofink, Annalen der Physik [6], **1**, S. 133 (1947).

Damit ist B und B^{-1} bis auf die gewöhnlichen Zahlen $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$ bzw. c und d bestimmt. Bei Vorgabe der ε^{μ} läßt sich der Matrixteil in diesen Ausdrücken sofort anschreiben und aus der Normierung $BB^{-1} = \mathrm{I}$ kann man das Produkt der Zahlenkoeffizienten $c_{\mu\nu} \cdot d_{\mu\nu}$ bzw. cd finden. Durch Hinzufügen von $\sqrt{c_{\mu\nu} d_{\mu\nu}}$ bzw. $\sqrt{cd}$ zum Matrixteil von B und B^{-1} wird $BB^{-1} = \mathrm{I}$ genügt.

Die Normierungsfaktoren $\sqrt{c_{\mu\nu} d_{\mu\nu}}$ bzw. $\sqrt{cd}$ lassen sich jedoch auch allgemein angeben; dazu sind noch einige im folgenden abgeleitete Hilfssätze vonnöten.

§ 7.

Einige Hilfssätze.

a) Gl. (6) kann man unter Weglassen zweier jetzt überflüssiger, rechts und links des Gleichheitszeichens vorkommender Summanden zu

$$(6\,a)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{3} \varepsilon^{\varkappa}_{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\varkappa}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} + \varepsilon^{4}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{4}_{\varrho\bar{\sigma}} + \varepsilon^{5}_{\bar{\varrho}\sigma}\,\varepsilon^{5}_{\varrho\bar{\sigma}} = \delta_{\bar{\varrho}\sigma}\,\delta_{\varrho\bar{\sigma}} + (\varepsilon^{4}\varepsilon^{5})_{\varrho\sigma}\,(\varepsilon^{4}\varepsilon^{5})_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} - (\varepsilon^{4}\varepsilon^{5})_{\bar{\varrho}\sigma}\,(\varepsilon^{4}\varepsilon^{5})_{\varrho\bar{\sigma}}$$

vereinfachen. Setzt man $\bar{\sigma} = \sigma$ bzw. $\bar{\varrho} = \varrho$ und summiert über σ bzw. ϱ von 1 bis 4, so erhält man

$$(30)\qquad \sum_{\mu=1}^{5} \varepsilon^{\mu}\overline{\varepsilon^{\mu}} = \mathrm{I} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\mu=1}^{5} \overline{\varepsilon^{\mu}}\,\varepsilon^{\mu} = \mathrm{I}.$$

b. Multipliziert man die erste Gleichung (30) mit geeigneten Matrizen von vorne und hinten, so findet man

z. B. mit $\varepsilon^{[45]}$ und $\overline{\varepsilon^{[45]}}$

$$(31)\qquad \varepsilon^{[23]}\overline{\varepsilon^{[23]}} + \varepsilon^{[31]}\overline{\varepsilon^{[31]}} + \varepsilon^{[12]}\overline{\varepsilon^{[12]}} = \varepsilon^{4}\overline{\varepsilon^{4}} + \varepsilon^{5}\overline{\varepsilon^{5}} + \varepsilon^{[45]}\overline{\varepsilon^{[45]}},$$

z. B. mit ε^{4} und $\overline{\varepsilon^{4}}$

$$(32)\qquad \varepsilon^{[14]}\overline{\varepsilon^{[14]}} + \varepsilon^{[24]}\overline{\varepsilon^{[24]}} + \varepsilon^{[34]}\overline{\varepsilon^{[34]}} = \mathrm{I} - \varepsilon^{4}\overline{\varepsilon^{4}} - \varepsilon^{[45]}\overline{\varepsilon^{[45]}},$$

z. B. mit ε^{5} und $\overline{\varepsilon^{5}}$

$$(33)\qquad \varepsilon^{[15]}\overline{\varepsilon^{[15]}} + \varepsilon^{[25]}\overline{\varepsilon^{[25]}} + \varepsilon^{[35]}\overline{\varepsilon^{[35]}} + \varepsilon^{[45]}\overline{\varepsilon^{[45]}} = \mathrm{I} - \varepsilon^{5}\overline{\varepsilon^{5}}.$$

Die Durchführung derselben Multiplikationen mit der zweiten Gl. (30) verschiebt den Querstrich vom zweiten auf den ersten Faktor; durch Addition von (31), (32), (33) ergibt sich für die Summe über alle Zweierprodukte $[\mu\nu]$, $\mu \neq \nu$

$$(34)\qquad \sum_{[\mu\nu]} \varepsilon^{[\mu\nu]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} = \sum_{[\mu\nu]} \overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}}\,\varepsilon^{[\mu\nu]} = 2\,\mathrm{I}.$$

c) Durch Multiplikation von (18) mit $\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}$ und Spurbilden findet man unter Beachtung der Kommutativität der $\mathrm{Sp}(MN) = \mathrm{Sp}(NM)$

$$(35\,a)\qquad \mathrm{Sp}(B\varepsilon^{[\varkappa\lambda]})\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1}) = \mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\varepsilon^{[\mu\nu]} - \varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} + \varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\varkappa}\varepsilon^{\lambda}\overline{\varepsilon^{\mu}} - \varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\varkappa}\varepsilon^{\lambda}\overline{\varepsilon^{\nu}}).$$

Vertauscht man $\varkappa\lambda$ mit $\mu\nu$, so wird unter Beachtung von $\mathrm{Sp}(M\overline{N}) = \mathrm{Sp}(N\overline{M})$

$$\mathrm{Sp}(B\varepsilon^{[\mu\nu]})\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}B^{-1}) = \mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\varepsilon^{[\mu\nu]} - \varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} + \varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\nu}\overline{\varepsilon^{\varkappa}} - \varepsilon^{\varkappa}\varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\nu}\overline{\varepsilon^{\lambda}}). \tag{35b}$$

Zu analogen Ausdrücken gelangt man durch Multiplikation von (25) mit $\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}$ und Spurbilden

$$\mathrm{Sp}(B\varepsilon^{[\varkappa\lambda]})\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1}) = \mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\varepsilon^{[\mu\nu]} - \varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} + \varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\varkappa}\overline{\varepsilon^{\lambda}} - \varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\lambda}\overline{\varepsilon^{\varkappa}}). \tag{35c}$$

und

$$\mathrm{Sp}(B\varepsilon^{[\mu\nu]})\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}B^{-1}) = \mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\varepsilon^{[\mu\nu]} - \varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} + \varepsilon^{\varkappa}\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\mu}\overline{\varepsilon^{\nu}} - \varepsilon^{\varkappa}\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\nu}\overline{\varepsilon^{\mu}}). \tag{35d}$$

Durch Addition dieser Gleichung entstehten

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(B\varepsilon^{[\varkappa\lambda]})\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1}) + \mathrm{Sp}(B\varepsilon^{[\mu\nu]})\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}B^{-1}) &= 2\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\varepsilon^{[\mu\nu]})\\ -2\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}}) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\{&(\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\nu} - \varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\lambda})\,\overline{\varepsilon^{\varkappa}} + (\varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\varkappa} - \varepsilon^{\varkappa}\varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\nu})\,\overline{\varepsilon^{\lambda}}\\ +(\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\varkappa}\varepsilon^{\lambda} - \varepsilon^{\varkappa}\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\nu})\,\overline{\varepsilon^{\mu}} &+ (\varepsilon^{\varkappa}\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\mu} - \varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\varkappa}\varepsilon^{\lambda})\,\overline{\varepsilon^{\nu}}\}.\end{aligned} \tag{36}$$

d) Multipliziert man die zweite Gleichung (30) von vorn bzw. hinten mit einer beliebigen Matrix $\varepsilon^{\overline{\nu}}$ bzw. ε^{j} aus dem Matrixring, so entsteht nach Spurbilden

$$\sum_{\mu=1}^{5}\mathrm{Sp}(\varepsilon^{\mu}\varepsilon^{j}\overline{\varepsilon^{\mu}}\overline{\varepsilon^{j'}}) = \mathrm{Sp}(\varepsilon^{j}\overline{\varepsilon^{j'}}). \tag{37}$$

Von der großen Anzahl der daraus folgenden Spursummen interessiert später der Fall $\varepsilon^{j} = \varepsilon^{\iota}$, $\varepsilon^{j'} = \varepsilon^{\iota}\varepsilon^{\varkappa}$. μ durchlaufe unter der Bezeichnung $\iota, \varkappa, \lambda, \mu, \nu$ in zyklischer Reihenfolge die Werte 1 bis 5, so ergibt sich aus (37)

$$\mathrm{Sp}\{\varepsilon^{[\iota\lambda]}\overline{\varepsilon^{[\iota\varkappa\lambda]}} + \varepsilon^{[\iota\mu]}\overline{\varepsilon^{[\iota\varkappa\mu]}} + \varepsilon^{[\iota\nu]}\overline{\varepsilon^{[\iota\varkappa\nu]}}\} = 0.$$

Die Dreierprodukte formt man mit Hilfe von $\varepsilon^{\iota}\varepsilon^{\varkappa}\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\mu}\varepsilon^{\nu} = \mathrm{I}$ in Zweierprodukte um

$$\mathrm{Sp}\{\varepsilon^{[\iota\lambda]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} + \varepsilon^{[\iota\mu]}\overline{\varepsilon^{[\nu\lambda]}} + \varepsilon^{[\iota\nu]}\overline{\varepsilon^{[\lambda\mu]}}\} = 0. \tag{38}$$

§ 8.

Ableitung der Normierungsfaktoren.

a) Aus (35a) folgt im Falle, daß $\varkappa = \mu$, $\lambda = \nu$ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(B\varepsilon^{[\mu\nu]})\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1}) &= \mathrm{Sp}(\mathrm{I} - \varepsilon^{[\mu\nu]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} - \varepsilon^{\mu}\overline{\varepsilon^{\mu}} - \varepsilon^{\nu}\overline{\varepsilon^{\nu}})\\ &= 4 - \mathrm{Sp}(\varepsilon^{\mu}\overline{\varepsilon^{\mu}} + \varepsilon^{\nu}\overline{\varepsilon^{\nu}} + \varepsilon^{[\mu\nu]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}}),\end{aligned} \tag{39}$$

wonach man an Stelle von $c_{\mu\nu}$ in (19) und $d_{\mu\nu}$ in (26) jeweils setzen kann

$$\sqrt{c_{\mu\nu}d_{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{4 - \mathrm{Sp}(\varepsilon^{\mu}\overline{\varepsilon^{\mu}} + \varepsilon^{\nu}\overline{\varepsilon^{\nu}} + \varepsilon^{[\mu\nu]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}})}}. \tag{40}$$

b) Sind in (36) alle oberen Indices $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ verschieden, so ist $\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\varepsilon^{[\mu\nu]} = -\varepsilon^{\iota}$ $= (-1)$ mal der fünften Matrix im Satze der Matrizen $\varepsilon^{\iota}, \varepsilon^{\varkappa}, \varepsilon^{\lambda}, \varepsilon^{\mu}, \varepsilon^{\nu}$. Ihre Spur ist 0. Auch der dritte Spurausdruck in (36) verschwindet, das zweite Glied bleibt allein übrig

$$\mathrm{Sp}(B\varepsilon^{[\varkappa\lambda]})\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1}) + \mathrm{Sp}(B\varepsilon^{[\mu\nu]})\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}B^{-1}) = -2\,\mathrm{Sp}(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}}). \tag{41}$$

c) Stimmen zwei Indices überein, z. B. $\varkappa$ und μ, während die zwei anderen untereinander und von $\varkappa$ verschieden sind, so ist

$$\begin{aligned}(42)\qquad &\mathrm{Sp}\,(B\varepsilon^{[\varkappa\lambda]})\,\mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\nu\varkappa]}B^{-1}) + \mathrm{Sp}\,(B\varepsilon^{[\nu\varkappa]})\,\mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}B^{-1})\\ &= 2\,\mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\varkappa\lambda]}\overline{\varepsilon^{[\varkappa\nu]}} + \varepsilon^{\lambda}\overline{\varepsilon^{\nu}}) = 2\,\mathrm{Sp}\,([\mathrm{I} - \overline{\varepsilon^{\varkappa}}\varepsilon^{\varkappa}]\,\varepsilon^{\lambda}\overline{\varepsilon^{\nu}}).\end{aligned}$$

d. Unter Anwendung von (39), (41) und (42) ist man in der Lage, jedes Glied in dem Produkt

$$(43)\qquad \frac{1}{cd} = \Big(\sum_{[\mu\nu]} \mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1})\Big)\cdot\Big(\sum_{[\varkappa\lambda]} \mathrm{Sp}\,(B\varepsilon^{[\varkappa\lambda]})\Big)$$

zu berechnen, worin sowohl $[\mu\nu]$ als auch $[\varkappa\lambda]$ alle 10 Zweierkombinationen der Zahlen 1 bis 5 durchlaufen. Unter diesen 100 Gliedern sind 10 enthalten, für welche $[\varkappa\lambda] = [\mu\nu]$ ist (Fall a), und die übrigen 90 Glieder lassen sich zu 45 Ausdrücken der Art von Gl. (41) und (42) zusammenfassen; davon gehören 15 Ausdrücke zum Fall b) und 30 zum Fall c.

Die Summe der 10 Produkte, die unter a) fallen, wird nach (39), (30) und (34)

$$\begin{aligned}(44)\qquad &\sum_{[\mu\nu]} \mathrm{Sp}\,(B\varepsilon^{[\mu\nu]})\,\mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{[\mu\nu]}B^{-1}) = 10\,\mathrm{Sp}\,\mathrm{I} - \sum_{[\mu\nu]} \mathrm{Sp}\,(\varepsilon^{\mu}\overline{\varepsilon^{\mu}} + \varepsilon^{\nu}\overline{\varepsilon^{\nu}} + \varepsilon^{[\mu\nu]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}})\\ &= 40 - 4\,\mathrm{Sp}\sum_{\mu=1}^{5}\varepsilon^{\mu}\overline{\varepsilon^{\mu}} - \mathrm{Sp}\sum_{[\mu\nu]}\varepsilon^{[\mu\nu]}\overline{\varepsilon^{[\mu\nu]}} = 40 - 4\,\mathrm{Sp}\,\mathrm{I} - 2\,\mathrm{Sp}\,\mathrm{I} = 16.\end{aligned}$$

Der Wert dieser Summe ist von der Wahl der $[\mu\nu]$ unabhängig. Die Summe der gemischten Glieder dagegen hängt von der getroffenen Wahl ab. Ordnet man die Glieder in B in der Reihenfolge zweier zyklischer Folgen $[\mu\nu] = 12, 23, 34, 45, 51; 31, 42, 53, 14, 25$, so lassen sich die 45 Ausdrücke, die unter Fall b) und c) fallen, mit Hilfe von (30) und (38) zusammenziehen zu

$$\begin{aligned}(45)\qquad 4S_0 = 4\,\mathrm{Sp}\{&\varepsilon^1\overline{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\overline{\varepsilon^3} + \varepsilon^3\overline{\varepsilon^4} + \varepsilon^4\overline{\varepsilon^5} + \varepsilon^5\overline{\varepsilon^1}\\ &- [\varepsilon^{[12]}\overline{\varepsilon^{[23]}} + \varepsilon^{[23]}\overline{\varepsilon^{[34]}} + \varepsilon^{[34]}\overline{\varepsilon^{[45]}} + \varepsilon^{[45]}\overline{\varepsilon^{[51]}} + \varepsilon^{[51]}\overline{\varepsilon^{[12]}}]\\ &- [\varepsilon^{[31]}\overline{\varepsilon^{[42]}} + \varepsilon^{[42]}\overline{\varepsilon^{[53]}} + \varepsilon^{[53]}\overline{\varepsilon^{[14]}} + \varepsilon^{[14]}\overline{\varepsilon^{[25]}} + \varepsilon^{[25]}\overline{\varepsilon^{[31]}}]\}.\end{aligned}$$

Trifft man also diese Auswahl der $[\mu\nu]$, so kann man an Stelle der Konstanten c und d in (29) jedesmal den Normierungsfaktor

$$\sqrt{cd} = \frac{1}{2\sqrt{4 + S_0}}$$

setzen, um $BB^{-1} = \mathrm{I}$ zu erfüllen.

(Eingegangen am 12. 11. 1947.)

Über die erste Randwertaufgabe bei regulären Variationsproblemen. I.

(Existenz der Lösung.)

Von

G. Nöbeling in Erlangen.

§ 1.

Einleitung.

A. Haar[1]) hat gezeigt, daß die erste Randwertaufgabe eines regulären Variationsproblems

$$\int F(p, q)\, dx\, dy = \text{Min}$$

für eine einfach geschlossene Kurve R des xyz-Raumes lösbar ist, wenn R der sog. Dreipunktebedingung genügt (d. h. wenn ein endliches $\Delta > 0$ existiert derart, daß die Steigung jeder durch drei Punkte von R aufgespannten Ebene $< \Delta$ ist; woraus insbesondere folgt, daß R sich schlicht auf eine konvexe Kurve K ohne Teilstrecken der xy-Ebene orthogonal projiziert).

Ein wesentlicher Beweisgedanke von Haar besteht in folgendem. Es wird eine gewisse Funktion $H(x, y)$ konstruiert, deren Fläche $z = H(x, y)$ die Randkurve R hat. Man will zeigen, daß $H(x, y)$ eine Lösung der Randwertaufgabe ist. Man nimmt an, dies wäre falsch. Dann liefert die Dreipunktebedingung eine Ebene $z = ax + by + c$, welche die Fläche $z = H(x, y)$, jedoch nicht die Randkurve R zerschneidet (wie dies z. B. bei der Halbkugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqq 0$ durch die Ebene $z = \frac{1}{2}$ geschieht). Hieraus läßt sich leicht ein Widerspruch herleiten.

Bei der Herleitung dieses Widerspruches wird von der Linearität der Funktion $ax + by + c$ gar kein Gebrauch gemacht, sondern nur davon, daß sie eine Lösung $\Phi(x, y)$ der zum betrachteten Variationsproblem gehörigen Eulerschen Differentialgleichung ist. Die erste Randwertaufgabe ist daher lösbar auch für jede Kurve R, bei welcher man aus der zu widerlegenden Annahme auf die Existenz einer Lösung $\Phi(x, y)$ der Eulerschen Differentialgleichung schließen kann, deren zugehörige Fläche $z = \Phi(x, y)$ die Fläche $z = H(x, y)$, jedoch nicht R zerschneidet.

Wir untersuchen in dieser Arbeit, für welche Kurven R man diese Schlüsse durchführen kann. Wir erhalten Kurven R, deren Projek-

[1]) Math. Ann. **97** (1917), S. 124—158; Hamburger Abhandlungen **8** (1931), S. 1—31.

tionen K i. a. nicht konvex sind, sondern eine schwächere Bedingung (Eigenschaft 4) erfüllen; die (nur bei konvexem K erfüllbare) Dreipunktebedingung wird ersetzt durch eine schwächere Bedingung (Eigenschaft 5), welche das Auftreten nach oben oder unten weisender Ecken oder Spitzen von R verhindert. Eine Einschränkung gegenüber HAAR ist nun aber folgendes: Der Durchmesser von R darf i. a. eine gewisse Schranke ϱ_0 nicht überschreiten. Nur wenn gewisse andere Voraussetzungen erfüllt sind, kann der Durchmesser von R beliebig sein (vgl. unten Satz 2 und den Teil III dieser Arbeit).

Präzisieren wir nun das Gesagte!

Zunächst das Variationsproblem! Es sei $F(p, q)$ eine eindeutige reelle Funktion, definiert und regulär analytisch in einer offenen Kreisscheibe $p^2 + q^2 < D^2$ $(0 < D \leqq +\infty)$ der reellen pq-Ebene[2]). Überall in der Kreisscheibe sei

$$F_{pp} > 0 \text{ und } F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2 > 0. \tag{1}$$

Eine in einer Menge M der reellen xy-Ebene E_2 definierte reelle Funktion $h(x, y)$ heißt global dehnungsbeschränkt mit der globalen Dehnungsschranke $d < \infty$ oder kürzer eine Funktion mit der globalen Dehnungsschranke d, wenn für je zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aus M die Ungleichung

$$\frac{|h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2)|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \leqq d$$

gilt. Eine solche Funktion ist in M stetig. Ist M offen, so enthält M eine LEBESGUEsche Nullmenge N derart, daß in jedem Punkt von $M - N$ die partiellen Ableitungen $h_x(x, y)$ und $h_y(x, y)$ existieren und der Ungleichung $h_x^2 + h_y^2 \leqq d^2$ genügen; die Funktionen $h_x(x, y)$ und $h_y(x, y)$ sind außerdem meßbar[3]). Die Funktion $h(x, y)$ heißt lokal dehnungsbeschränkt mit der (konstanten) lokalen Dehnungsschranke d, oder kürzer *eine Funktion mit der lokalen Dehnungsschranke* d, wenn jeder Punkt (x, y) von M eine Umgebung U besitzt derart, daß $h(x, y)$ in MU global dehnungsbeschränkt ist mit der globalen Dehnungsschranke d[4]).

Nun sei G eine beschränkte, offene Menge der xy-Ebene. Mit $\mathfrak{F}(\overline{G})$ bezeichnen wir das System aller in der abgeschlossenen Hülle $\overline{G}$ definierten Funktionen $h(x, y)$ mit lokalen Dehnungsschranken $< D$ in $\overline{G}$. Wir setzen das LEBESGUE-Integral

$$\int_G F(h_x, h_y)\, dx\, dy = I[h, G]$$

[2]) A. HAAR betrachtet nur den Fall $D = +\infty$.

[3]) Vgl. z. B. O. HAUPT und G. AUMANN, Differential- und Integralrechnung, Berlin 1938, III. Bd., S. 132—136.

[4]) Das Adjektiv „lokal" bedeutet also nicht, daß d von (x, y) abhängt, sondern nur, daß U von (x, y) abhängt.

und verstehen unter dem *Variationsproblem*

(2) $$I[H, G] = \text{Min bezügl. } \mathfrak{F}(\bar{G})$$

die Aufgabe, in $\mathfrak{F}(\bar{G})$ Funktionen $H(x, y)$ mit folgender Eigenschaft zu finden: Ist $h(x, y)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$, die auf der Begrenzung G^* von G, jedoch nicht in G mit $H(x, y)$ identisch ist, so gilt

(3) $$I[H, G] < I[h, G].$$

Wegen der Ungleichungen (1) nennt man das Variationsproblem (2) regulär.

Übrigens kann man an Stelle der Ungleichung (3) auch die Ungleichung

(4) $$I[H, G] \leqq I[h, G]$$

setzen, ohne zu anderen Lösungen $H(x, y)$ zu gelangen (siehe die Bemerkung auf S. 728).

Als Randkurven für die erste Randwertaufgabe wollen wir die folgendermaßen definierten Kurven R zulassen.

Eine Punktmenge R des xyz-Raumes heiße eine *zugelassene Kurve*, wenn sie folgende fünf Eigenschaften besitzt:

Eigenschaft 1. R ist Summe von endlich vielen paarweise fremden einfach geschlossenen Kurven[5]) $R^1, \ldots, R^m$.

Eigenschaft 2. Die (Orthogonal-)Projektion von R in die xy-Ebene ist schlicht.

Eigenschaft 3. Das Projektionsbild K von R ist die Begrenzung G^* eines beschränkten Gebietes $G = G(R)$ der xy-Ebene[6])[7]).

Eigenschaft 4. Es existiert eine Zahl r mit $0 < r \leqq +\infty$ derart, daß durch jeden Punkt von K (mindestens) ein zu G fremder, G nicht umschließender Kreis[8]) mit dem Radius r vorhanden ist[9]).

---

[5]) Eine einfach geschlossene Kurve ist ein topologisches Bild des Einheitskreises $[0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ r = 1]$. Unter einer Kurve verstehen wir in dieser Arbeit stets eine Punktemenge R mit der Eigenschaft 1.

[6]) Unter dem Projektionsbild verstehen wir das Bild von R bei der (Orthogonal-)Projektion in die xy-Ebene.

[7]) Ein Gebiet ist eine zusammenhängende offene Menge. (Als Bereich bezeichnen wir jede Menge M.) Sind die einfach geschlossenen Kurven $K^1, \ldots, K^m$ die Projektionsbilder der $R^1, \ldots, R^m$, so sind zufolge der Eigenschaft 3, bei geeigneter Numerierung, $K^2, \ldots, K^m$ im Innengebiet von K^1 enthalten, während von den Kurven $K^2, \ldots, K^m$ jede im Außengebiet jeder anderen liegt. — Besitzt $K = K^1 + \cdots + K^m$ die Eigenschaft 4 und hat R, also auch K, einen Durchmesser $\leqq r$, so ist $m = 1$.

[8]) Ein Kreis ist für uns immer eine Kreislinie, eine Kugel stets eine Kugelfläche. Eine Gerade bzw. Ebene betrachten wir als Kreis bzw. Kugel mit dem Radius $+\infty$.

[9]) Dies ist wesentlich für die Lösbarkeit des Randwertproblems. Beispielsweise kann man die Stromfunktion der stationären Potentialströmung eines

Eigenschaft 5. Es existieren zwei Zahlen c und d mit $0 < c \leqq +\infty$ und $0 < d < D$ derart, daß es zu jedem Punkt P von R zwei Kugeln [8]) mit dem Radius c gibt, deren Steigung [10]) in P höchstens gleich d ist und von denen die eine R in P von oben, die andere R in P von unten berührt.

Dabei sagen wir, die Kugel S berühre die Kurve R im Punkt P von oben, wenn P auf S liegt, während, wenn (x, y, z') auf R und (x, y, z'') auf S liegt, stets gilt $z' \leqq z''$. (Das Innere von S ist dann fremd zu R.)

Die Eigenschaft 4 hat den Zweck zu verhindern, daß K Ecken oder Spitzen hat, welche in G hineinragen [9]) (in $E_2 - \bar{G}$ hineinragende Ecken und Spitzen dürfen auftreten). Wir nennen deshalb K auf der Seite G stumpf (vom Grade r). Allgemein bezeichnen wir die Begrenzung G^* einer offenen Menge G der Ebene E_2 als *stumpf (vom Grade r) auf der Seite G*, wenn sie die Eigenschaft 4 hat [11]). Die Bedingung 5 hat zur Folge, daß R keine senkrecht nach oben oder unten weisende Ecken oder Spitzen hat und außerdem, daß jede Zahl $> d$ eine lokale Dehnungsschranke von R ist.

Ist R eine zugelassene Kurve und G das auf Grund der Eigenschaft 3 zu R gehörige Gebiet, so ist die z-Koordinate der Punkte von R eine eindeutige, stetige Funktion $z = r(x, y)$ auf der Begrenzung G^* von G. Wir betrachten die *Randwertaufgabe*, die durch Hinzufügung der Randbedingung

$$H(x, y) = r(x, y) \text{ auf } G^* \tag{5}$$

zu (2) entsteht.

Eine zulässige Kurve R, für welche das Randwertproblem (2), (5) eine und natürlich nur eine Lösung H besitzt, heiße eine *Kurve mit Lösung*.

---

adiabatisch kompressiblen Gases als Lösung eines regulären Variationsproblems deuten. Für dieses Variationsproblem ist das Randwertproblem unlösbar, wenn R aus einer Kontur K^1 der xy-Ebene und einem Kreis besteht, der parallel zur xy-Ebene, aber nicht in ihr liegt und dessen Projektion K^1 umschließt, und wenn K^1 eine Ecke hat, welche in das ringförmige Gebiet G zwischen K^1 und der Kreisprojektion hineinragt. Denn das Gas kann um solch eine Ecke nicht herumströmen.

[10]) Ist $f(x, y)$ eine auf einer Menge M der xy-Ebene definierte Funktion, so ist ihre Steigung in einem Punkt (x_0, y_0) von M oder in $(x_0, y_0, +(x_0, y_0))$ die Zahl

$$\limsup_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in M}} \frac{|f(x, y) - f(x_0, y_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}.$$

[11]) Beispielsweise ist jede einfach geschlossene Kurve $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$, $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ mit zweimal stetig differenzierbarem $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ stumpf auf beiden Seiten (vgl. Teil II dieser Arbeit, Satz 6).

Unser oben angekündigtes Ergebnis ist nun enthalten in folgendem

Satz 1. *Es seien r_0, c_0 und d_0 drei beliebige Zahlen mit $0 < r_0 \leqq +\infty$, $0 < c_0 \leqq +\infty$ und $0 < d_0 < D$. Dann existiert eine Zahl $\varrho_0 = \varrho_0(r_0, c_0, d_0) > 0$ derart, daß für jede zugelassene Kurve R, welche die Eigenschaften 4 und 5 hat mit Zahlen $r \geqq r_0$, $c \geqq c_0$ und $d \leqq d_0$ und einen Durchmesser $< \varrho_0$ hat, die Randwertaufgabe* (2), (5) *lösbar ist*[12]).

Speziell gilt

Satz 2. *Für jede zugelassene Kurve R, welche die Eigenschaft 5 für die Zahl $c = +\infty$ hat, ist die Randwertaufgabe* (2), (5) *lösbar.*

Dieser Satz 2 umfaßt den eingangs genannten Satz von A. Haar, ist jedoch auch im Falle $D = +\infty$ allgemeiner, da K im Falle $c = +\infty$ zwar konvex ist (also $m = 1$), aber Strecken enthalten kann.

§ 2.

Untersuchung der auf einer Seite stumpfen Kurven und der zugelassenen Kurven[13]).

Satz 3. *Es sei K eine auf einer Seite G vom Grade r stumpfe Kurve. Dann existiert in jedem Punkt von K sowohl die vordere als auch die hintere Halbtangente*[14]).

Beweis. Angenommen, dies wäre falsch für einen Punkt P von K. Es sei L ein Kreis $\subset E_2 - G$ durch P (mit dem Radius r), T die Tangente von L in P und H die abgeschlossene, L nicht enthaltende Halbebene mit der Begrenzungsgeraden T. Auf Grund der Annahme enthält K einen Teilbogen B mit dem Endpunkt P, welcher seinerseits zwei gegen P konvergente Punktfolgen $\{P_i'\}$ bzw. $\{P_i''\}$ enthält derart, daß wenn S_i' bzw. S_i'' die Halbgerade durch P' bzw. P_i'' mit dem Endpunkt P ist, die Folgen $\{S_i'\}$ und $\{S_i''\}$ gegen zwei verschiedene Halbgeraden S' bzw. S'' konvergieren. S' und S'' enden in P und liegen in H. Es sei S die in P endende Halbgerade $\subset H$, welche den in H liegenden Winkel zwischen S' und S'' halbiert. S hat mit B (mindestens) eine gegen P konvergente Punktfolge $\{Q_i\}$ gemein (man beachte, daß das Innere von L zu B fremd ist). Durch jeden Punkt Q_i geht ein Kreis $M_i \subset E_2 - G$ mit dem Radius r. Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir sofort annehmen, daß die Folge $\{M_i\}$ gegen einen Kreis M (durch P) konvergiert. Da das Innere von M_i keinen der Punkte $Q_1, Q_2, \ldots$ enthält, enthält die Tangente an M in P die Halbgerade S. Folglich ist S' oder S'', etwa S', zum Innengebiet

[12]) Natürlich hängt ϱ_0 auch von F und D ab; wir heben dies aber nicht besonders hervor.

[13]) Einen großen Teil der Sätze der §§ 2—4 werden wir erst im Teil II dieser Arbeit verwenden.

[14]) Wir denken uns in K eine Orientierung irgendwie festgelegt.

I von M nicht fremd. Daher liegen fast alle Punkte P_i' in I, im Widerspruch dazu, daß K zu I fremd ist.

Satz 4. *Es sei K eine auf einer Seite G vom Grade r stumpfe Kurve. Es sei $\{P_i\}$ eine von hinten gegen einen Punkt P von K konvergente Punktfolge von K. Schließlich sei H_i bzw. V_i die hintere bzw. vordere Halbtangente in P_i, H' die hintere Halbtangente in P und H'' die H' zu einer Geraden ergänzende Halbgerade. Dann konvergiert die Folge $\{H_i\}$ gegen H', die Folge $\{V_i\}$ gegen H''. Das Analoge gilt, wenn wir hierin „hintere" durch „vordere" ersetzen und umgekehrt.*

Wir drücken dies kurz so aus: *Die Halbtangenten von K sind stetig.*

Beweis. Indem wir nötigenfalls endlich viele P_i streichen, können wir annehmen, daß alle P_i in der P enthaltenden Komponente K_0 von K enthalten sind. Es sei L_i ein Kreis $\subset E_2 - G$ durch P_i mit dem Radius r. Da die Gerade durch die Punkte P_i und P für $i \to \infty$ nach Satz 3 gegen die Gerade $H = H' + H''$ konvergiert und das Innere jedes Kreises L_i keinen der Punkte $P_1, P_2, \ldots$ enthält, konvergiert die Folge $\{L_i\}$ gegen einen Kreis $L \subset E_2 - G$ durch P mit dem Radius r und der Tangente H in P. Orientieren wir L im entgegengesetzten Sinne wie K_0, so ist H' die hintere Halbtangente auch von L. Damit ist insbesondere gezeigt: Durch den Punkt P geht ein Kreis $L \subset E_2 - G$ mit dem Radius r, entgegengesetzt gerichtet zu K_0, dessen hintere Halbtangente in P gleich der hinteren Halbtangente H' von K_0 in P ist. Dasselbe gilt natürlich auch für jeden Punkt P_i. Wir können also von vornherein annehmen, daß der Kreis L_i, entgegengesetzt gerichtet mit K_0, die hintere Halbtangente H_i hat. Jetzt folgt aus $P_i \to P$ und $L_i \to L$ sofort $H_i \to H'$. Analog zeigt man $V_i \to H''$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Es sei P ein Punkt einer Kurve K, die auf einer Seite G stumpf vom Grade r ist. Es sei $\alpha = \alpha(P)$ mit $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ der Winkel zwischen der hinteren und vorderen Halbtangente an K in P. Je nachdem, ob $\alpha = \pi$, $0 < \alpha < \pi$ oder $\alpha = 0$ gilt, sagen wir, K sei in P differenzierbar, habe in P eine Ecke oder habe in P eine Spitze.

Satz 5. *Eine auf einer Seite vom Grade r stumpfe Kurve K hat höchstens endlich viele Spitzen und höchstens endlich viele Ecken, deren Winkel α eine obere Schranke $\alpha_0 < \pi$ haben (also höchstens abzählbar viele Ecken).*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein α_0 mit $0 < \alpha_0 < \pi$ und unendlich viele Punkte $P_i (i = 1, 2, \ldots)$ mit $\alpha(P_i) \leqq \alpha_0$. O. B. d. A. können wir annehmen, daß $\{P_i\}$ gegen einen Punkt P konvergiert. Nun ergibt Satz 4 sofort einen Widerspruch.

Ein Beispiel. Es sei $\{L_i\}$ eine Folge von Kreisen mit Radius r, die gegen einen Kreis L (mit Radius r) konvergieren; die Mittelpunkte der L_i (und L) mögen dabei auf einer Geraden liegen. Es sei G' die

Menge aller Punkte, die innerhalb von mindestens einem L_i liegen, und K die Begrenzung von G'. Dann ist die Kurve K stumpf auf der Seite $E_z - \overline{G'}$ vom Grade r. Sie hat unendlich viele Ecken. Sie ist nicht Summe endlich vieler Konvexbogen.

Satz 6. *Jede auf einer Seite stumpfe Kurve K ist rektifizierbar.*

Beweis. K ist nach Satz 4 und dem Überdeckungssatz von Heine-Borel-Lebesgue darstellbar als Summe endlich vieler Bogen der Gestalt $y = f(x)$ bzw. $x = f(y)$, deren jede in einem Intervall der x- bzw. y-Achse definiert und dehnungsbeschränkt ist. Jeder solche Bogen ist rektifizierbar.

Satz 7. *Jede zugelassene Kurve R ist global dehnungsbeschränkt*[14a]).

Beweis. Da die Kugeln, von denen in der Eigenschaft 5 die Rede ist, sämtlich denselben Radius c haben und im Berührungspunkt ihre Steigung die feste Zahl $d < D$ nicht übertrifft, existiert zu jeder Zahl $d' > d$ ein $t > 0$ derart, daß folgendes gilt: ist (x_0, y_0, z_0) ein beliebiger Punkt von R und (x_1, y_1, z_1) ein Punkt, dessen Projektion (x_1, y_1) von (x_0, y_0) einen Abstand $< t$ hat und der auf der unteren bzw. oberen Hälfte einer der R in (x_0, y_0, z_0) von oben oder unten gemäß Eigenschaft 5 berührenden Kugeln liegt, so gilt

$$|z_1 - z_0| < d' \cdot \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Da R in (x_0, y_0, z_0) von zwei solchen Kugeln von oben und unten berührt wird, gilt auch für jeden Punkt (x_1, y_1, z_1) von R mit

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < t^2$$

die Ungleichung

$$|z_1 - z_0| < d' \cdot \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Das heißt: *R ist lokal dehnungsbeschränkt und jede Zahl $d' > d$ ist eine lokale Dehnungsschranke von R.*

Hat nun für den Punkt $(x_1, y_1, z_1$ von R die Projektion (x_1, y_1) von (x_0, y_0) einen Abstand $\geqq t$, so gilt, wenn R zwischen den Ebenen $z = k$ und $z = -k$ liegt,

$$|z_1 - z_0| \leqq \frac{2k}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$
$$\leqq \frac{2k}{t} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Also ist $\mathrm{Max}\left(d', \frac{2k}{t}\right)$ eine globale Dehnungsschranke von R, wobei d' eine beliebige Zahl $> d$ ist.

[14a]) D. h. es existiert eine Zahl $\delta < +\infty$ derart, daß

$$|z_1 - z_0| \leqq \delta \cdot \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

ist hier je zwei Punkte (x_0, y_0, z_0) und (x_1, y_1, z_1) von R.

§ 3.

Einige Sätze über dehnungsbeschränkte Funktionen.

Hilfssatz 1. In der offenen Menge G der xy-Ebene sei eine lokal dehnungsbeschränkte Funktion $h(x, y)$ mit der lokalen Dehnungsschranke d gegeben. Dann hat $h(x, y)$ auf jeder Strecke $S \subset G$ die Dehnungsschranke d.

Beweis. Man kann S in endlich viele Teilstrecken zerlegen, auf denen $h(x, y)$ die Dehnungsschranke d hat.

Hilfssatz 2. Es sei G ein Gebiet der xy-Ebene. Die Begrenzung G^* von G sei die Summe endlich vieler, paarweise fremder, einfach geschlossener Kurven, die auf der Seite G stumpf sind. Dann existiert eine beschränkte Funktion $\Theta(\delta)$, definiert für $\delta > 0$, mit $\lim\limits_{\delta \to 0} \Theta(\delta) = 0$, für welche folgendes gilt: Je zwei Punkte von G mit dem Abstand δ können verbunden werden durch einen rektifizierbaren Bogen $\subset G$ mit einer Länge $\leqq (1 + \Theta(\delta)) \cdot \delta$.

Beweis. Es sei δ eine beliebige positive Zahl und es seien (x', y') und (x'', y'') zwei Punkte aus G mit dem Abstand δ. Hat ihre Verbindungsstrecke S mit der ersten der geschlossenen Kurven $K_1, \ldots K_m$, aus denen sich G^* zusammensetzt, mindestens zwei Punkte (ξ', η') und (ξ'', η'') gemein und sind dies der erste bzw. letzte Punkt von $K_1 S$, den man bei der Durchlaufung von S antrifft, so ersetzen wir die Teilstrecke von S mit den Endpunkten (ξ', η') und (ξ'', η'') durch einen der beiden Teilbogen von K_1 mit denselben Endpunkten. Sodann verfahren wir genau so mit $K_2, \ldots K_m$. Auf diese Weise erhalten wir einen Teilbogen von $\overline{G}$ mit den Endpunkten (x', y') und (x'', y''), dessen Länge $< \delta + L = \left(1 + \frac{L}{\delta}\right) \delta$ ist, wobei L die Gesamtlänge von $G^* = K_1 + \cdots + K_m$ bedeutet. Sodann existiert auch ein Bogen $\subset G$ mit den Endpunkten (x', y') und (x'', y''), dessen Länge $< \left(1 + \frac{L}{\delta}\right) \delta$ ist. Bezeichnen wir also mit $\frac{1}{2}\Theta(\delta)$ die untere Grenze der Zahlen Θ mit der Eigenschaft, daß je zwei Punkte aus G mit dem Abstand δ durch einen Bogen $\subset G$ einer Länge $< (1 + \Theta)\delta$ verbunden werden können, so ist also $\Theta(\delta) < 2\frac{L}{\delta}$.

Wir haben noch die Behauptung $\lim\limits_{\delta \to 0} \Theta(\delta) = 0$ zu beweisen. Angenommen, sie wäre falsch. Dann existieren eine positive Zahl ϑ und zwei Punktfolgen $\{p_i'\}$ und $\{p_i''\}$ in G derart, daß die Abstände δ_i der Punkte p_i' und p_i'' eine Nullfolge bilden und jeder Bogen $\subset G$ mit den Endpunkten p_i' und p_i'' eine Länge $\geqq (1 + \vartheta)\delta_i$ hat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir sofort annehmen, daß die Folgen $\{p_i'\}$ und $\{p_i''\}$ gegen einen Punkt p von $\overline{G}$ konvergieren. Läge p in G, so wäre, weil G offen ist, für jedes hinreichend große i die Strecke S_i mit den Endpunkten p_i' und p_i'' in G enthalten; die Länge von S_i ist aber

gleich δ_i, also $< (1+\vartheta)\,\delta_i$. Also liegt p in G^*. Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Erster Fall: G^* ist in p differenzierbar. Nun folgt aus Satz 4 die Existenz eines Teilbogens B von G^*, welcher p enthält, jedoch nicht als Endpunkt, und die Eigenschaft hat, daß für je zwei Sehnen von B der kleinere Winkel α, den die sie enthaltenden Geraden einschließen, der Bedingung $\cos\alpha \geqq \left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)^{-1}$ genügen, so daß also für je zwei Punkte p''' und p^{IV} von B folgendes gilt: Hat die Strecke bzw. der Teilbogen von B mit den Endpunkten p''' und p^{IV} die Länge s bzw. σ, so ist $\sigma \leqq \left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)s$. Weil nach Wahl der Folgen $\{p_i'\}$ und $\{p_i''\}$ die Strecke S_i mit den Endpunkten p_i' und p_i'' nicht in $\overline{G}$ liegen kann, treffen wir bei einer Durchlaufung von S_i auf einen ersten Punkt p_i''' und einen dazu verschiedenen letzten Punkt p_i^{IV}, der in G^* liegt. Ist i hinreichend groß, so liegen p_i''' und p_i^{IV} in B wegen $\lim p_i' = p = \lim p_i''$. Ersetzen wir nun die Teilstrecke von S_i mit den Endpunkten p_i''' und p_i^{IV} durch den Teilbogen von B mit denselben Endpunkten, so erhalten wir einen Teilbogen C von $\overline{G}$ mit den Endpunkten p' und p_i'', dessen Länge $\leqq \left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)\delta_i$ ist. Durch eine kleine Abänderung von C erhalten wir schließlich einen Teilbogen von G mit den Endpunkten p_i' und p_i'', dessen Länge $< (1+\vartheta)\,\delta_i$ ist, im Widerspruch zur Wahl von p_i' und p_i''. Zweiter Fall: G^* hat in p eine Spitze oder Ecke. Dann enthält G^* nach Satz 4 zwei in p endende und nur den Punkt p gemein habende Bogen B_1 und B_2 mit denselben Eigenschaften, wie sie der Bogen B im ersten Fall hat. Für jedes hinreichend große i hat dann die Strecke S_i mit den Endpunkten p_i' und p_i'' entweder mit B_1 mindestens zwei und mit $B_2 - (p)$ keine oder mit B_2 mindestens zwei und mit $B_1 - (p)$ keine Punkte gemein. Dieselbe Überlegung, die im ersten Fall zum Widerspruch führte, liefert, jetzt auf B_1 bzw. B_2 angewandt, einen analogen Widerspruch.

Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Es sei δ eine Zahl mit $0 < \delta \leqq +\infty$, M und N seien zwei Punktmengen der xy-Ebene mit einem Abstand $< \delta$ voneinander, f sei eine Funktion mit einem Definitionsbereich $\supset M+N$. Unter $d^\delta(f, M, N)$ verstehen wir das Supremum ($\leqq +\infty$) der Quotienten

$$\frac{|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|}{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}},$$

wobei (x_1, y_1), (x_2, y_2) alle Punktepaare durchläuft, die den Bedingungen $(x_1, y_1) \in M$, $(x_2, y_2) \in N$, $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 < \delta^2$ genügen. Ist $M = N$, so schreiben wir $d^\delta(f, M)$ statt $d^\delta(f, M, N)$. Es gilt: a) Ist $\delta < +\infty$ und $d^\delta(f, M) < +\infty$, so ist $d^\delta(f, M)$ eine lokale Dehnungsschranke von f in M; b) ist δ mindestens gleich dem Durchmesser von M und $d^\delta(f, M) < +\infty$, so ist $d^\delta(f, M)$ eine Dehnungsschranke von f in M; c) ist N in M dicht und f in M stetig, so ist $d^\delta(f, M) = d^\delta(f, N)$.

Satz 8. *Es sei G ein beschränktes Gebiet der xy-Ebene. Die Begrenzung G^* von G sei die Summe endlich vieler, paarweise fremder, einfach geschlossener Kurven, die auf der Seite G stumpf sind. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jede Funktion $h(x, y)$ mit einer lokalen Dehnungsschranke d in G gilt $d^{\delta}(h, G) \leqq (1 + \varepsilon) d$.*

Beweis. Wir wählen ein δ derart, daß für die Funktion Θ des Hilfssatzes 2 gilt $\Theta(\delta_0) < \varepsilon$ für jedes δ_0 mit $0 < \delta_0 < \delta$. Nun seien (x', y') und (x'', y'') zwei Punkte aus G mit einem Abstand $\delta_0 < \delta$ voneinander. Nach dem Hilfssatz 2 können wir sie verbinden durch einen Bogen $B \subset G$ mit einer Länge $\leqq (1 + \varepsilon)\delta_0$. Für ein beliebiges $\eta > 0$ verbinden wir (x', y') und (x'', y'') durch einen Sehnenzug $S_1 + \cdots + S_k \subset G$, dessen Länge $l_1 + \cdots + l_k < (1 + \eta + \varepsilon)\delta_0$ ist. Nach dem Hilfssatz 1 ist $|h(x', y') - h(x'', y'')| \leqq (l_1 + \cdots + l_k) d$. Also ist

$$h(x', y') - h(x'', y'')| \leqq (1 + \eta + \varepsilon)\delta_0 d$$

für jedes $\eta > 0$. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

Satz 9. *Es sei G ein beschränktes Gebiet der xy-Ebene. Die Begrenzung G^* von G sei die Summe endlich vieler, paarweise fremder, einfach geschlossener Kurven, die auf der Seite G stumpf sind. Schließlich sei $h(x, y)$ eine in G definierte Funktion mit einer lokalen Dehnungsschranke d in G. Dann kann $h(x, y)$ erweitert werden zu einer in $\overline{G}$ definierten, stetigen Funktion $\bar{h}(x, y)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß $d^{\delta}(\bar{h}, \overline{G}) \leqq (1 + \varepsilon) d$ ist. (Insbesondere ist also jede Zahl $d' > d$ eine lokale Dehnungsschranke von $\bar{h}(x, y)$ in $\overline{G}$).*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir wählen dazu ein $\delta > 0$ gemäß Satz 8 und setzen $(1 + \varepsilon) d = d'$. Für je zwei Punkte (x_0', y_0') und (x_1'', y'') aus G, deren Abstand $\delta' < \delta$ ist, gilt dann

$$|h(x_0, y_0) - h(x_1, y_1)| \leqq d' \delta'.$$

Hieraus folgt die Behauptung unmittelbar.

Satz 10. *In einer beschränkten Menge M der xy-Ebene sei eine Folge $\{f_n(x)\}$ von Funktionen gegeben, die eine gemeinsame globale Dehnungsschranke Δ besitzen. a) Ist für mindestens einen Punkt (x_0, y_0) von M die Folge $\{f_n(x_0, y_0)\}$ beschränkt, so enthält die Folge $\{f_n(x_0, y)\}$ eine auf M gleichmäßig konvergente Teilfolge. b) Ist die Folge $\{f_n(x, y)\}$ auf M konvergent, so ist sie auf M gleichmäßig konvergent.*

Beweis. Es sei δ der (endliche) Durchmesser von M. Ist σ eine Schranke für $\{f_n(x_0, y_0)\}$, also $|f_n(x_0, y_0)| < \sigma$ für alle n, so gilt für jeden Punkt (x, y) von M und alle n die Ungleichung

$$|f_n(x, y)| < |f_n(x_0, y_0)| + \Delta\delta < \sigma + \Delta\delta.$$

Also sind die $f_n(x, y)$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ und alle Punkte (x, y) aus M gleichmäßig beschränkt. Nun sei $\{(x_i, y_i)\}$ eine Folge von Punkten

aus M, die in M dicht ist. Aus der Folge $\{f_n\}$ wählen wir zunächst eine Teilfolge aus, die im Punkt (x_1, y_1) konvergiert, aus dieser eine Teilfolge, die auch im Punkt (x_2, y_2) konvergiert; usw. Die Diagonalfolge $\{f_{n_j}\}$ dieser Teilfolgen ist dann in allen Punkten (x_i, y_i) konvergent. Auf diese Weise also bestimmen wir im Falle a) die Folge $\{f_{n_j}\}$. Im Falle b) ersetzen wir $\{f_n\} = \{f_{n_j}\}$; auch dann konvergiert die Folge $\{f_{n_j}\}$ in jedem Punkt (x_i, y_i).

Wir behaupten, daß die Folge $\{f_{n_j}\}$ in M gleichmäßig konvergiert. Es sei ein $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir wählen zunächst ein natürliches k derart, daß jeder Punkt aus M von mindestens einem der k Punkte $(x_1, y_1), \ldots (x_k, y_k)$ einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3\Delta}$ hat. Sodann wählen wir ein natürliches j_0 derart, daß für je zwei natürliche $j > j_0$. $h > j_0$ und jedes $i = 1, \ldots, k$ gilt $|f_{n_j}(x_i, y_i) - f_{n_h}(x_i, y_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt für jeden Punkt (x, y) aus M und für $j > j_0$, $h > j_0$, wenn (x, y) von (x_i, y_i) einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3\Delta}$ hat:

$$|f_{n_j}(x, y) - f_{n_h}(x, y)| \leqq |f_{n_j}(x, y) - f_{n_j}(x_i, y_i)| + |f_{n_j}(x_i, y_i) - f_{n_h}(x_i, y)|$$
$$+ |f_{n_h}(x_i, y_i) - f_{n_h}(x, y)| < \Delta \frac{\varepsilon}{3\Delta} + \frac{\varepsilon}{3} + \Delta \frac{\varepsilon}{3\Delta} = \varepsilon.$$

Satz 11. *In der xy-Ebene seien A eine beliebige Menge und G_0 eine offene Menge mit $\bar{G}_0 \subset A$. Weiter sei δ eine Zahl mit $0 < \delta \leqq +\infty$. Schließlich sei f eine Funktion mit einem Definitionsbereich $\supset A$. Dann gilt* $d^\delta(f, A) = \mathrm{Max}\,(d^\delta(f, \bar{G}_0), d^\delta(f, A - G_0))$.

Beweis. Wir setzen $d^\delta(f, \bar{G}_0) = d_0$, $d^\delta(f, A - G_0) = d_1$ und $\mathrm{Max}\,(d_0, d_1) = d$. Nun seien (x, y) und (x', y') zwei Punkte aus A mit einem Abstand $\leqq \delta$. Liegen sie beide in $\bar{G}_0$ oder beide in $A - G_0$, so ist

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leqq d_0 \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

bzw.

$$\leqq d_1 \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Nun liege (x, y) in G_0, (x', y') in $A - \bar{G}_0$. Auf der Verbindungsstrecke V der beiden Punkte liegt dann ein Punkt (x^*, y^*) der Begrenzung G_0^* von G_0. Da dieser Punkt sowohl in $\bar{G}_0$ als auch in $A - G_0$ liegt, gelten die Ungleichungen

$$|f(x, y) - f(x^*, y^*)| \leqq d \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2},$$
$$|f(*, y^*) - f(x', y')| \leqq d \sqrt{(x^* - x')^2 + (y^* - y')^2}.$$

Die Addition dieser beiden Ungleichungen ergibt, da (x^*, y^*) auf V liegt,

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leqq d \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Satz 12. *In der xy-Ebene seien A eine in sich kompakte Menge und $G_0 \subset A$ eine offene Menge. In $\overline{G}_0$ sei eine Funktion $f_0(x, y)$ mit einer globalen bzw. lokalen Dehnungsschranke d_0 und in A eine Funktion $f_1(x, y)$ mit einer globalen bzw. lokalen Dehnungsschranke d_1 gegeben. Auf der Begrenzung G_0^* von G_0 sei $f_0(x, y) \equiv f_1(x, y)$. Für die Funktion $f(x, y)$, die auf G_0 mit $f_0(x, y)$, auf $A - G_0$ mit $f_1(x, y)$ identisch ist, ist dann $d = \mathrm{Max}(d_0, d_1)$ eine globale bzw. lokale Dehnungsschranke. (Im globalen Fall ist die Voraussetzung, daß A in sich kompakt ist, überflüssig).*

Beweis. Globaler Fall. Die Behauptung folgt aus Satz 11 mit $\delta = +\infty$. — Lokaler Fall. Nach dem Borelschen Überdeckungssatz können wir $\overline{G}_0$ durch endlich viele offene Mengen $U_1, \ldots, U_m$ derart überdecken, daß $f_0(x, y)$ in jeder Menge $\overline{G}_0 \cdot U_i$ die globale Dehnungsschranke d_0 hat. Dann existiert ein $\delta_0 > 0$ derart, daß für jeden Punkt p von $\overline{G}_0$ die Kreisscheibe um p mit dem Radius δ_0 in einer Menge U enthalten ist. Also ist $d^{\delta_0}(f_0, \overline{G}_0) \leqq d_0$. Analog erhalten wir ein $\delta_1 > 0$, so daß $d^{\delta_1}(f_1, A) \leqq d_1$ ist. Folglich gelten für $\delta = \mathrm{Min}(\delta_0, \delta_1)$ die Ungleichungen $d^{\delta}(f_0, G_0) \leqq d$ und $d^{\delta}(f_1, A) \leqq d$, mithin auch $d^{\delta}(f, \overline{G}_0) \leqq d$ und $d^{\delta}(f, A - G_0) \leqq d$. Mithin ist der Satz 11 auf $f(x, y)$ anwendbar. Folglich ist $d^{\delta}(f, A) \leqq d$ und daher d eine lokale Dehnungsschranke von $f(x, y)$.

Satz 13. *Es sei G eine offene Menge der xy-Ebene und G^{**} der Durchschnitt der Begrenzung G^* von G mit der offenen, konvexen Hülle von G. In $\overline{G}$ sei eine stetige Funktion $f(x, y)$ definiert, die in G nach x und y einmal stetig differenzierbar ist. Es sei d_1 das Supremum der Steigung von $f(x, y)$ in G und δ eine Zahl mit $0 < \delta \leqq +\infty$. Dann gilt*

$$d^{\delta}(f, \overline{G}) = \mathrm{Max}(d_1, d^{\delta}(f, G^{**}))\ ^{15}).$$

Beweis. Wir setzen $d^{\delta}(f, G^{**}) = d_2$ und $\mathrm{Max}(d_1, d_2) = d$. Da $d^{\delta}(f, \overline{G}) \geqq d_1$ und $d^{\delta}(f, \overline{G}) \geqq d_2$ ist, genügt es, $d^{\delta}(f, \overline{G}) \leqq d$ und wegen der Stetigkeit von f sogar, $d^{\delta}(f, G) \leqq d$ zu beweisen. Es seien also (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Punkte aus G mit einem Abstand $< \delta$. Ist ihre Verbindungsstrecke V in G enthalten, so ist

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqq d_1 \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y_2)},$$

wie unmittelbar aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt, angewandt auf die Strecke V. Andernfalls treffen wir bei der Durchlaufung der Strecke V von (x_1, y_1) nach (x_2, y_2) einen ersten und einen letzten (eventuell mit dem ersten zusammenfallenden) in G^{**} liegenden Punkt (x_3, y_3) bzw. (x_4, y_4). Da die offenen Strecken von (x_1, y_1) nach (x_3, y_3) und von (x_4, y_4) nach (x_2, y_2) in G liegen, gilt

$$|f(x_1, y_1) - f(x_3, y_3)| \leqq d_1 \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$$

[15]) Ist G konvex, also G^{**} leer, so setzen wir $d^{\delta}(f, G^{**}) = 0$.

und

$$|f(x_4, y_4) - f(x_2, y_2)| \leqq d_1 \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2}.$$

Ist $(x_3, y_3) \neq (x_4, y_4)$, so gilt außerdem

$$|f(x_3, y_3) - f(x_4, y_4)| \leqq d_2 \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}.$$

Die Addition der letzten drei Ungleichungen ergibt wieder

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqq d \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Satz 14. *Auf der abgeschlossenen Menge A der xy-Ebene E_2 sei eine Funktion $f^*(x,y)$ mit einer globalen Dehnungsschranke Δ definiert. Dann gibt es Funktionen $f(x, y)$, definiert in der ganzen Ebene E_2 mit der globalen Dehnungsschranke Δ, die auf A mit $f^*(x, y)$ identisch sind.*

Beweis. Wir bemerken zunächst folgendes: Wenn zwei Funktionen $\varphi_1(x, y)$ und $\varphi_2(x, y)$ die globale Dehnungsschranke Δ haben, so haben im Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche auch die Funktionen $\mathrm{Inf}(\varphi_1, \varphi_2)$ und $\mathrm{Supr}(\varphi_1, \varphi_2)$ die globale Dehnungsschranke Δ; das entsprechende gilt natürlich auch für endlich oder abzählbar oder unabzählbar unendlich viele Funktionen φ. Nun sei, wenn (x_0, y_0) ein Punkt von A ist,

$$k(x, y, x_0, y_0) = f^*(x_0, y_0) + \Delta \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Wir setzen $f(x, y) = \mathrm{Inf}\, k(x, y, x_0, y_0)$, wobei (x_0, y_0) die Menge A durchläuft. Sie ist in ganz E_2 definiert, auf A mit $f^*(x, y)$ identisch und hat die globale Dehnungsschranke Δ.

§ 4.

Über (G, d)-Extremalen und Lösungen des Variationsproblems.

Hilfssatz 3. In der offenen Menge G sei eine lokal dehnungsbeschränkte Menge $k(x, y)$ gegeben. Es sei G^0 die Menge aller Punkte von G mit $k(x, y) = 0$. Dann ist $k_x^2 + k_y^2 = 0$ überall in G^0, außer höchstens in den Punkten einer Nullmenge.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir G als beschränkt voraussetzen. Angenommen nun, die Menge P aller Punkte von G^0, in welchen $k_x^2 + k_y^2 > 0$ ist, wäre keine Nullmenge. Da k_x und k_y meßbar sind, ist auch P meßbar. Wir bezeichnen ihr Lebesguesches Maß $m(P)$ mit ε. Es ist also $\varepsilon > 0$. Die Menge G enthält eine abgeschlossene Teilmenge Q mit einem Maß $m(Q) > m(G) - \varepsilon$, auf welcher $k(x, y)$ total differenzierbar ist und die Ableitungen k_x und k_y stetig sind[3]). Dann hat die Menge $PQ = R$ ein Maß $m(R) > 0$. Sie enthält also eine perfekte Teilmenge S mit einem Maß $m(S) > 0$. Es sei s ein beliebiger Punkt von S. Da in ihm $k_x^2 + k_y^2 > 0$ ist, existiert die Schnittgerade $g(s)$ der Tangentialebene an die (S enthaltende) Fläche $z = k(x, y)$ im Punkt s mit der Ebene $z = 0$. Da k_x und k_y auf S stetig sind, hängt $g(s)$ von s stetig ab. Da S in der Fläche

$z = k(x, y)$ liegt, ist $g(s)$ Tangente an S in s, d. h. für alle zu s hinreichend benachbarten Punkte s' von S schneidet die Verbindungsgerade der Punkte s und s' die Gerade $g(s)$ unter einem beliebig kleinen Winkel. Die Menge S hat also in jedem ihrer Punkte s eine Tangente und diese hängt von s stetig ab. Also ist $m(S) = 0$, im Widerspruch zu $m(S) > 0$.

Hilfssatz 4. Ist in einem Gebiet G eine global dehnungsbeschränkte Funktion φ definiert, deren partielle Ableitungen φ_x und φ_y in ganz G außer eventuell einer Nullmenge N (existieren und) verschwinden, so ist φ eine Konstante.

Beweis. Es sei M_1 bzw. M_2 die Menge aller Geraden parallel zur x- bzw. y-Achse. In M_1 bzw. M_2 ist dicht die Menge M_1' bzw. M_2' aller Geraden aus M_1 bzw. M_2, deren Durchschnitte mit N lineare Nullmengen sind. Hieraus folgt unmittelbar die Konstanz von φ in R, wenn man weiß, daß φ konstant ist auf jedem Intervall der Durchschnitte von R mit den Geraden aus M_1' und M_2'. Also genügt es zu zeigen: Ist in einem Intervall, etwa im Einheitsintervall E der x-Achse, eine Funktion χ mit einer globalen Dehnungschranke Δ gegeben, deren Ableitung überall in E außer höchstens einer linearen Nullmenge N verschwindet, so ist χ eine Konstante. Zum Beweis dieser Behauptung seien δ und ε zwei beliebige positive Zahlen. Weiter sei P eine abgeschlossene Teilmenge von $E - N$ mit einem Maß $> 1 - \varepsilon$, auf welcher χ gleichmäßig differenzierbar ist[3]). Dann existiert eine positive Zahl ζ derart, daß für jedes x aus P und jedes $\bar{x}$ aus E mit $|x - \bar{x}| < \zeta$ die Ungleichung $|\chi(x) - \chi(\bar{x})| < \delta |x - \bar{x}|$ gilt. Nun seien x' und x'' zwei beliebige Punkte aus E. Wir verbinden sie durch eine Kette $x' = x_1, x_3, \ldots x_{2k+1} = x''$ derart, daß je zwei aufeinander folgende Punkte einen Abstand $< \zeta$ haben. Liegen im offenen Intervall zwischen x_{2i-1} und x_{2i+1} Punkte von P, so bezeichnen wir einen dieser Punkte von P mit x_{2i}; andernfalls sei x_{2i} der Mittelpunkt des Intervalls ($i = 1, \ldots, k$). Für jedes $j = 1, 2, \ldots 2k + 1$ sind nun zwei Fälle möglich: Entweder liegt einer der beiden Punkte x_j und x_{j+1} in P, dann gilt:

$$|\chi(x_j) - \chi(x_{j+1})| < \delta |x_j - x_{j+1}|. \tag{6}$$

Oder keiner der beiden Punkte liegt in P; dann gilt wenigstens

$$|\chi(x_j) - \chi(x_{j+1})| < \Delta |x_j - x_{j+1}|, \tag{7}$$

da χ die globale Dehnungsschranke Δ hat. Dieser letztere Fall tritt nur dann ein, wenn das ganze Intervall zwischen x_j und x_{j+1} zu P fremd, also in $E - P$ enthalten ist. Da $E - P$ einen Inhalt $< \varepsilon$ hat, ist die Gesamtlänge der Intervalle, für welche der zweite Fall vorliegt, $< \varepsilon$. Die Gesamtlänge der Intervalle, für welche der erste Fall vorliegt, ist $\leqq 1$, da E das Einheitsintervall ist. Also ergibt die Addition der Ungleichungen (6) und (7) die Ungleichung

$$|\chi(x') - \chi(x'')| < \delta + \Delta\varepsilon.$$

Da δ und ε beliebig klein wählbar sind, gilt $\chi(x') = \chi(x'')$. Damit ist der Hilfssatz 4 bewiesen.

Es sei G eine beschränkte, offene Menge der xy-Ebene und $f(x, y)$ eine in $\bar{G}$ definierte Funktion mit einer globalen bzw. lokalen Dehnungsschranke $d < D$ in $\bar{G}$. Falls dann für jede ebensolche Funktion $\bar{f}$ (mit derselben globalen bzw. lokalen Dehnungsschranke d in $\bar{G}$), die auf G^* mit f identisch ist, die Ungleichung $I[f, G] \leqq I[\bar{f}, G]$ gilt, heiße f eine *globale bzw. lokale* (G, d)*-Extremale.*

Satz 15[16]).

α) *Ist f eine globale bzw. lokale (G, d)-Extremale und G_0 eine offene Teilmenge von G, so ist f auch eine globale bzw. lokale (G_0, d)-Extremale.*

Sonst gäbe es nämlich in $\bar{G}_0$ eine Funktion f_0 mit der globalen bzw. lokalen Dehnungsschranke d in $\bar{G}_0$, die auf G_0^* mit f identisch ist, derart, daß $I[f_0, G_0] < I[f, G_0]$ ist. Nun erkläre man eine Funktion $\bar{f}$ durch die Festsetzungen $\bar{f} = f$ in $\bar{G} - G_0$, $\bar{f} = f_0$ in G_0. Dann hat $\bar{f}$ nach Satz 12 die globale bzw. lokale Dehnungsschranke d in $\bar{G}$. Weiter ist $I[\bar{f}, G - G_0] = I[f, G - G_0]$; denn in $G - G_0$ ist überall $\bar{f} = f$ und folglich $\bar{f}_x = f_x$ und $\bar{f}_y = f_y$ überall in $G - G_0$ außer höchstens in einer Nullmenge nach Hilfssatz 3. Schließlich ist $I[\bar{f}, G_0] = I[f_0, G_0] < I[f, G_0]$. Addition ergibt $I[\bar{f}, G] < I[f, G]$, im Widerspruch dazu, daß f eine globale bzw. lokale (G, d)-Extremale ist.

β) *Ist f eine globale bzw. lokale (G, d)-Extremale und a eine Konstante, so ist auch $f + a$ eine globale bzw. lokale (G, d)-Extremale.*

Dies folgt einfach daraus, daß im Integral $I[f, G]$ nur die Ableitungen f_x und f_y vorkommen, nicht aber f selbst.

γ) *Ist f eine globale bzw. lokale (G, d)-Extremale und bezeichnet G^{hk} für zwei beliebige Konstante h und k die aus G durch eine Parallelverschiebung um den Vektor mit den Komponenten h und k hervorgehende offene Menge so ist $f(x - h, y - k)$ eine globale bzw. lokale (G^{hk}, d)-Extremale.*

δ) *Stimmen zwei globale bzw. lokale (G, d)-Extremalen f_1 und f_2 auf G^* überein, so sind sie identisch auch in G.*

Zum Beweis betrachten wir die Funktion $\bar{f} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. Sie stimmt auf G^* mit f_1 und f_2 überein und hat ebenfalls die globale bzw. lokale Dehnungsschranke d in $\bar{G}$. Da f und f_2 Extremalen sind, gilt also

$$I[f_1, G] \leqq I[\bar{f}, G] \text{ und } I[f_2, G] \leqq I[\bar{f}, G],$$

woraus durch Addition folgt

$$\frac{1}{2}(I[f_1, G] + I[f_2, G]) \leqq I[\bar{f}, G]. \tag{8}$$

Wir betrachten die Funktion

$$H(t) = F(p_1 + t(p_2 - p_1),\ q_1 + t(q_2 - q_1)),$$

[16]) T. Radó, Math. Ann. **101** (1929), S. 628.

wobei p_1, p_2, q_1, q_2 die partiellen Ableitungen nach x und y von f_1 und f_2 sind (sie existieren überall in G bis auf eine Nullmenge). Sie hat, wenn $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$ ist, wegen (1) eine positive zweite Ableitung $H''(t)$, ist also konvex. Daher gilt $H(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}(H(0) + H(1))$ oder

$$F\left(\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{q_1+q_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(F(p_1, q_1) + F(p_2, q_2)), \tag{9}$$

wenn $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$. Integration der letzten Ungleichung ergibt

$$I\left[\frac{f_1+f_2}{2}, G\right] \leqq \frac{I[f_1, G] + I[f_2, G]}{2} \tag{10}$$

Hierin kann das Gleichheitszeichen wegen (9) nur dann gelten, wenn $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ in ganz G bis auf eine Nullmenge ist, wenn also $f_1 - f_2$ konstant ist in jeder Komponente von G (Hilfssatz 4). Nun folgt aber aus (8) und (10), daß in (8) tatsächlich das Gleichheitszeichen gilt. Also ist $f_1 - f_2 =$ konst. in jeder Komponente von G. Da f_1 und f_2 in G^* identisch und in $\bar{G}$ stetig sind, ist $f_1 \equiv f_2$.

ε) *Gilt für die globale bzw. lokale* (G, d)*-Extremalen* f_1 *und* f_2 *auf ganz* G^* *die Ungleichung* $f_1 \leqq f_2$, *so gilt sie auch in ganz* G.

Angenommen, an mindestens einer Stelle (x, y) von G wäre

$$f_1(x, y) > f_2(x, y).$$

Dann ist also die offene Teilmenge G_0 von G, bestehend aus allen Punkten (x, y) von G mit $f_1(x, y) > f_2(x, y)$, nicht leer. Auf der Begrenzung von G_0 ist überall $f_1(x, y) = f_2(x, y)$, entgegen α) und δ).

ζ) *Ist* f_1 *eine globale bzw. lokale* (G_1, d)*-Extremale,* f_2 *eine globale bzw. lokale* (G_2, d)*-Extremale und ist* G *eine gemeinsame offene Teilmenge von* G_1 *und* G_2, *so ist* $f_2 - f_1$ *in* G *monoton* (f heißt in G monoton, wenn folgendes gilt: Sobald auf der Begrenzung irgend einer offenen Teilmenge G' von G eine Ungleichung $m' \leqq f \leqq M'$ identisch erfüllt ist (m' und M' konstant), so gilt sie auch überall in G').

Sonst gäbe es nämlich eine offene Teilmenge G_0 von G derart, daß auf G_0^* eine Ungleichung $m' \leqq f_2 - f_1 \leqq M'$ besteht, während in einem Punkt (x_0, y_0) von G_0 die Differenz $f_2 - f_1$ etwa größer als M' ist. Es sei G_{00} die Menge aller Punkte von G_0, in denen $f_2 - f_1 > M'$ ist. Dann gilt

$$f_2 - f_1 = M' \text{ auf } G_{00}^* \tag{11}$$

$$f_2 - f_1 > M' \text{ in } G_{00}. \tag{12}$$

Wegen $G_{00} \subset G_1$ und $G_{00} \subset G_2$ folgt aus β) und α), daß die Funktionen $f_2 - M'$ und f_1 beide globale bzw. lokale (G_{00}, d)-Extremalen sind. Wegen (11) und δ) gilt $f_2 - f_1 \equiv M'$ auf ganz G_{00} im Widerspruch zu (12).

η) *Ist* f *eine globale bzw. lokale* (G, d)*-Extremale und* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *ein Punktepaar aus* $\bar{G}$, *so existiert in* G^* *ein Punkt* (x_3, y_3) *und in* $\bar{G}$ *ein Punkt* (x_4, y_4) *derart, daß* $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$, $y_1 - y_2 = y_3 - y$ *gilt und*

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y)| \leqq |f(x_3, y_3) - f(x_4, y_4)|.$$

Wir setzen $x_2 - x_1 = h$, $y_2 - y_1 = k$ und bezeichnen mit G^{hk} die offene Menge, welche aus G durch Parallelverschiebung um den Vektor mit den Komponenten h und k hervorgeht. Da (x_2, y_2) im Durchschnitt $H = GG^{hk}$ von G und G^{hk} liegt, gibt es nach γ) und ξ) in H^* einen Punkt (x_3, y_3) mit

$$|f(x_2, y_2) - f(x_2 - h, y_2 - k)| \leqq |f(x_3, y_3) - f(x_3 - h, y_3 - k)|.$$

Liegt aber (x_3, y_3) in H^*, so liegt wenigstens einer der beiden Punkte (x_3, y_3), $(x_3 - h, y_3 - k)$ in G^* wegen $H^* \subset G^* + G^{hk*}$.

Der Zusammenhang zwischen den Lösungen des Variationsproblems (2) *und den lokalen* (G, d)*-Extremalen* ist folgender: In der abgeschlossenen Hülle $\bar{G}$ einer beschränkten, offenen Menge G der xy-Ebene sei eine Funktion $H(x, y)$ mit einer lokalen Dehnungsschranke $d < D$ in $\bar{G}$ gegeben; *ist* $H(x, y)$ *eine Lösung des Variationsproblems* (2), *so ist* $H(x, y)$ *eine lokale* (G, d')*-Extremale für jedes* d' *mit* $d \leqq d' < D$ *und umgekehrt.* Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus den Definitionen der Lösung des Variationsproblems (2) und der lokalen (G, d')-Extremalen. Die umgekehrte Behauptung ergibt sich folgendermaßen: Es sei $H(x, y)$ eine lokale (G, d')-Extremale für jedes d' mit $d \leqq d' < D$. Ist dann $h(x, y)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$, die auf G^* mit H identisch ist, so gilt also $I[H, G] \leqq I[h, G]$. Angenommen, für ein solches $h_0(x, y)$ gilt $I[H, G] = I[h_0, G]$. Sei $d_0 > d$ eine gemeinsame lokale Dehnungsschranke von $H(x, y)$ und $h_0(x, y)$. Dann gilt $I[H, G] = I[h_0, G] \leqq I[h, G]$ für jede Funktion $h(x, y)$, welche in $\bar{G}$ die lokale Dehnungsschranke d_0 hat und auf G^* mit $H(x, y)$ und $h_0(x, y)$ identisch ist. Also sind $H(x, y)$ und $h_0(x, y)$ lokale (G, d_0)-Extremalen und folglich nach Satz 15, δ) identisch.

Bemerkung. Eine Funktion $H(x, y)$ aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$ ist dann und nur dann eine Lösung des Variationsproblems (2), wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Ist $h(x, y)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$, die auf der Begrenzung G^* von G mit $H(x, y)$ identisch ist, so gilt $I[H, G] \leqq I[h, G]$.

Das „dann" folgt direkt aus dem soeben Bewiesenen (nämlich aus dem „umgekehrt"); das „nur dann" aus der Definition des Variationsproblems (S. 714).

Satz 16. *Es sei* f *eine globale oder lokale* (G, d)*-Extremale und* δ *eine positive Zahl. Dann ist* $d^\delta(f, \bar{G}) = d^\delta(f, G^*, G)$.

Beweis. Aus $G^* \subset \bar{G}$ und $G \subset \bar{G}$ folgt $d^\delta(f, \bar{G}) \geqq d^\delta(f, G^*, G)$. Der Beweis der umgekehrten Ungleichung ergibt sich folgendermaßen. Es sei (x_1, y_1), (x_2, y_2) ein Punktepaar aus $\bar{G}$ mit einem Abstand $< \delta$. Nach Satz 15, η) existiert in G^* ein Punkt (x_3, y_3) und in $\bar{G}$ ein Punkt (x_4, y_4) derart, daß (x_3, y_3) und (x_4, y_4) ebenfalls einen Abstand $< \delta$ haben und

$$\frac{|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \leqq \frac{|f(x_3, y_3) - f(x_4, y_4)|}{\sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}}$$

gilt. Da f als lokal dehnungsbeschränkte Funktion stetig ist, existiert, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben ist, in G ein so nahe bei (x_4, y_4) gelegener Punkt (x_5, y_5), daß (x_3, y_3) und (x_5, y_5) ebenfalls einen Abstand $< \delta$ haben und

$$\frac{|f(x_3, y_3) - f(x_4, y_4)|}{\sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}} \leqq \frac{|f(x_3, y_3) - f(x_5, y_5)|}{\sqrt{(x_3 - x_5)^2 + (y_3 - y_5)^2}} + \varepsilon$$

ist. Hieraus folgt $d^0(f, \bar{G}) = d^0(f, G^*, G)$.

Satz 17. *Es sei G ein beschränktes Gebiet der xy-Ebene, deren Begrenzung G^* eine Summe endlich vieler, paarweise fremder, einfach geschlossener Kurven ist, die auf der Seite G stumpf sind. In $\bar{G}$ sei eine gleichmäßig konvergente Folge $\{H_n(x, y)\}$ von Lösungen des Variationsproblems (2) gegeben, die eine gemeinsame lokale Dehnungsschranke $d < D$ in G haben. Dann ist die Funktion $H(x, y) = \lim H_n(x, y)$ ebenfalls eine Lösung des Variationsproblems (2).*

Beweis. Da die Funktionen $H_n(x, y)$ als Funktionen aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$ in $\bar{G}$ stetig sind, ist auch $H(x, y)$ in $\bar{G}$ stetig. Jeder Punkt (x, y) von G ist enthalten in einer Kreisscheibe $T \subset G$. Nach Hilfssatz 1 hat jede Funktion $H_n(x, y)$ in T die globale Dehnungsschranke d. Also hat auch $H(x, y)$ in T die globale Dehnungsschranke d. Hieraus und aus Satz 9 folgt, daß $H(x, y)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$ ist und daß jedes $d' > d$ eine lokale Dehnungsschranke von $H(x, y)$ und allen $H_n(x, y)$ in $\bar{G}$ ist.

Es sei $h(x, y)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$, die auf G^* mit $H(x, y)$ identisch ist, und d' mit $d < d' < D$ eine lokale Dehnungsschranke von $h(x, y)$ in $\bar{G}$. Nach der Bemerkung vor Satz 16 genügt es, die Ungleichung $I[H, G] \leqq I[h, G]$ zu beweisen.

Wir setzen $h(x, y) - H(x, y) = k(x, y)$. Dann hat $k(x, y)$ in G die lokale Dehnungsschranke $d + d'$, ist also in G fast überall total differenzierbar[3]). Wir bezeichnen mit G^+, G^-, G^0 die Menge aller Punkte von G, in denen $k > 0$ bzw. < 0 bzw. $= 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von $h(x, y)$ und $H(x, y)$ sind G^+ und G^- offen und ist G^0 in G abgeschlossen.

Nach dem Hilfssatz 3 ist $I[H, G^0] = I[h, G^0]$.

Ist G^+ nicht leer, so wollen wir $I[H, G^+] \leqq I[h, G^+]$ beweisen.

Es sei m_n das Maximum von $|H(x, y) - H_n(x, y)|$ in $\bar{G}$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der $H_n(x, y)$ gegen $H(x, y)$ gilt $\lim m_n = 0$. Wir setzen $H_n(x, y) + m_n = \tilde{H}_n(x, y)$. Dann gilt $\tilde{H}_n(x, y) \geqq H(x, y)$ in $\bar{G}$, alle $\tilde{H}_n(x, y)$ sind Lösungen des Variationsproblems (2) mit der lokalen Dehnungsschranke d in G und die Folge $\{\tilde{H}_n(x, y)\}$ konvergiert in $\bar{G}$ gleichmäßig gegen $H(x, y)$. Indem wir statt $\tilde{H}_n(x, y)$ wieder $H_n(x, y)$ schreiben, können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$H(x, y) \leqq H_n(x, y)$$

annehmen.

Die Funktionen

$$h_n(x,y) = \mathrm{Max}\,(H_n(x,y),\ h(x,y))$$

haben eine und dieselbe lokale Dehnungsschranke $d' < D$ in $\bar{G}$, in $\bar{G} - G^+$ gilt $h_n(x,y) \equiv H_n(x,y)$ und in G^+ gilt $h_n(x,y) \not\equiv H_n(x,y)$, wenn n hinreichend groß ist. Angenommen, es wäre $l[H,G^+] > l[h,G^+]$. Wir setzen $l[H,G^+] - l[h,G^+] = 2\delta$. Wegen der Unterhalbstetigkeit

$$l[H,G^+] \leqq \underline{\lim}\, l[H_n, G^+]\ ^{17})$$

ist dann $l[H_n, G] - l[h,G^+] > \delta$ für fast alle n. Nun sei U eine Umgebung der Begrenzung von G^+ derart, daß $l[\Phi', G^+] - l[\Phi'', G^+] < \delta$ ist für je zwei Funktionen Φ' und Φ'' mit der lokalen Dehnungsschranke d' in $\bar{G}^+$, die in $G^+ - G^+U$ identisch sind. (Da für alle solche Funktionen Φ gilt $\Phi_x^2 + \Phi_y^2 \leqq d' < D$ und daher $F(\Phi_x, \Phi_y)$ gleichmäßig beschränkt ist für alle solche Funktionen Φ, ist $l[\Phi, G^+U] < \frac{\delta}{2}$ für alle solche Φ, wenn man U so wählt, daß G^+U ein hinreichend kleines Maß hat.) Weil $G^+ - G^+U$ in sich kompakt ist, hat das stetige $k(x,y)$ in $G^+ - G^+U$ eine positive untere Schranke σ. Für fast alle n ist $H_n(x,y) - H(x,y) < \sigma$ überall in G, also $h(x,y) > H_n(x,y)$ und folglich ist $h_n(x,y) \equiv h(x,y)$ in $G^+ - G^+U$ für fast alle n. Also gilt $l[H_n, G^+] - l[h_n, G^+] > 0$, wegen $h_n(x,y) \equiv H_n(x,y)$ in $G - G^+$, also $l[H_n, G] - l[h_n, G] > 0$, für alle diese n. Dies ist aber unmöglich, da $H_n(x,y)$ eine Lösung des Variationsproblems (2) für das Gebiet G ist. Also ist $l[H,G^+] \leqq l[h,G^+]$.

Analog zeigt man $l[H,G^-] \leqq l[h,G^-]$.

Die Addition der drei Beziehungen $l[H,G^0] = l[h,G^0]$, $l[H,G^+] \leqq l[h,G^+]$ und $l[H,G^-] \leqq l[h,G^-]$ ergibt $l[H,G] \leqq l[h,G]$.

Damit ist Satz 17 bewiesen.

Satz 18. *Es sei G eine beschränkte, offene Menge der xy-Ebene und $H(x,y)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$. Ist $H(x,y)$ eine Lösung des Variationsproblems $l[H,G] = \mathrm{Min}$ bzgl. $\mathfrak{F}(\bar{G})$, so ist für jede offene Teilmenge G' von G die Funktion $H(x,y)$, nur auf $\bar{G}'$ betrachtet, eine Lösung des Variationsproblems $l[H,G'] = \mathrm{Min}$ bzgl. $\mathfrak{F}(\bar{G}')$. Ist umgekehrt für jede offene Teilmenge G' von G mit $\bar{G}' \subset G$ die Funktion $H(x,y)$, nur auf $\bar{G}'$ betrachtet, eine Lösung des Variationsproblems $l[H,G'] = \mathrm{Min}$ bzgl. $\mathfrak{F}(\bar{G}')$, so ist $H(x,y)$ eine Lösung des Variationsproblems $l[H,G] = \mathrm{Min}$ bzgl. $\mathfrak{F}(\bar{G})$.*

---

[17]) T. Radó, Math. Ann. **101** (1929), S. 626. Hier wird die Unterhalbstetigkeit nur für (gleichmäßig) *global* dehnungsbeschränkte Funktionen bewiesen. Sie besteht also unter unseren Voraussetzungen zunächst auf jeder Dreiecksfläche $\Delta \subset G^+$, da in einem solchen Δ alle H_n und H die globale Dehnungsschranke d haben (vgl. Hilfssatz 1). Mittels einer Tringulierung von G^+ folgt hieraus die Unterhalbstetigkeit in G^+.

Beweis. Es sei $H(x, y)$ eine Lösung des Variationsproblems $I[H, G] = \text{Min}$ bzgl. $\mathfrak{F}(\bar{G})$ und G' eine offene Teilmenge von G. Weiter sei $h(x, y)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G'})$, die auf der Begrenzung G'^* von G' mit $H(x, y)$ identisch ist. Wir setzen $h(x, y)$ auf ganz $\bar{G}$ fort, indem wir auf $G - G'$ setzen $h(x, y) = H(x, y)$. Dann liegt $h(x, y)$ in $\mathfrak{F}(\bar{G})$ nach Satz 12. Neben $I[H, G] \leqq I[h, G]$ gilt $I[H, G - G'] = I[h, G - G']$, da nach dem Hilfssatz 3 aus $h \equiv H$ in $G - G'$ folgt, daß $h_x = H_x$ und $h_y = H_y$ fast überall in $G - G'$ ist. Also gilt $I[H, G'] \leqq I[h, G']$.

Nun sei $H(x, y) \in \mathfrak{F}(\bar{G})$ eine Lösung des Variationsproblems $I[H, G'] = \text{Min}$ bzgl. $\mathfrak{F}(\bar{G'})$ für jede offene Teilmenge G' von G mit $\bar{G'} \subset G$. Weiter sei $h(x, y)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$, die auf G^* mit $H(x, y)$ identisch ist. Nach der Bemerkung von S. 728 genügt wieder der Beweis der Ungleichung $I[H, G] \leqq I[h, G]$.

Wie im Beweis des Satzes 17 bezeichnen wir mit G^+, G^-, G^0 die offene Menge aller Punkte von G, in denen $h(x, y) - H(x, y) = k(x, y) > 0, < 0, = 0$ ist. Wie dort ist $I[H, G^0] = I[h, G^0]$ und genügt es auch hier, die Ungleichungen $I[H, G^+] \leqq I[h, G^+]$ und $I[H, G^-] \leqq I[h, G^-]$ zu beweisen.

Beweisen wir etwa $I[H, G^+] \leqq I[h, G^+]$, falls G^+ nicht leer ist. Auf der Begrenzung von G^+ ist überall $H(x, y) = h(x, y)$. Für jedes natürliche n ist die Menge G_n^+ aller Punkte (x, y) von G^+, für welche $H(x, y) + \frac{1}{n} < h(x, y)$ ist, eine offene Teilmenge von G^+ mit $\bar{G}_n^+ \subset G^+$. Auf der Begrenzung von G_n^+ ist $H(x, y) + \frac{1}{n} = h(x, y)$. Nach der Voraussetzung des Satzes 18 ist also $I[H, G_n^+] \leqq I[h, G_n^+]$. Wegen $G_1^+ \subset G_2^+ \subset \ldots$ und $\sum G_n^+ = G^+$ ist also $I[H, G^+] \leqq I[h, G^+]$. — Analog zeigt man $I[H, G^-] \leqq I[h, G^-]$.

Damit ist der Satz 18 bewiesen.

Wir betrachten nun die Eulersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} F_p(p, q) + \frac{\partial}{\partial y} F_q(p, q) = 0 \tag{13}$$

des Variationsproblems (2).

Satz 19. *Es sei G eine beschränkte, offene Menge der xy-Ebene und $H(x, y)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$. Ist $H(x, y)$ eine Lösung des Variationsproblems* (2), *so ist $H(x, y)$ in G eine regulär analytische Lösung der Differentialgleichung* (13). *Ist $H(x, y)$ in G eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung* (13), *so ist $H(x, y)$ eine in G regulär analytische Lösung des Variationsproblems* (2).

Beweis[18]). Ist $H(x, y)$ eine Lösung des Variationsproblems (2), so ist $H(x, y)$ in G regulär analytisch[19]), also bekanntlich eine Lösung von (13).

[18]) Vgl. zu diesem Beweis: A. Haar, a. a. O.[1]).

[19]) a) L. Lichtenstein, Bull. de l' Acad. des Sciences de Cracovie 1913, S. 915—941, b) E. Hopf, Math. Zeitschrift **30** (1929), S. 404—413, c) C. B. Morrey jr.,

Nun sei $H(x, y)$ in G eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung (13). Weiter sei $h(x, y)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$, die auf G^* mit $H(x, y)$ identisch ist, auf G hingegen nicht. Wir haben die Ungleichung $I[H, G] < I[h, G]$ zu beweisen.

Wir setzen $h(x, y) - H(x, y) = k(x, y)$ und bezeichnen mit G^+, G^-, G^0 die Menge aller Punkte von G, in denen $k(x, y) > 0$, $k(x, y) < 0$, $k(x, y) = 0$ ist. Es ist $I[H, G^0] = I[h, G^0]$ (Hilfssatz 3). Es genügt also zu zeigen, daß $I[H, G^+] < I[h, G^+]$ und $I[H, G^-] < I[h, G^-]$ ist, falls G^+ bzw. G^- nicht leer ist. Zeigen wir etwa das erstere.

Wir setzen $H_x + \Theta k_x = p$ und $H_y + \Theta k_y = q$. Diese Funktionen $\bar{p}$ und $\bar{q}$ sind überall in G^+ bis auf eine Nullmenge N definiert und meßbar. Wir beschränken Θ auf das Intervall $0 \leqq \Theta \leqq 1$. Dann liegt in der $p\,q$-Ebene der Punkt $(\bar{p}, \bar{q})$ auf der Verbindungsstrecke der Punkte (H_x, H_y) und (h_x, h_y), also in der Kreisscheibe $[p^2 + q^2 \leqq d^2]$, wobei $d < D$ eine gemeinsame lokale Dehnungsschranke von H und L ist; also ist $F(\bar{p}, \bar{q})$ für $(x, y) \in G^+ - N$, $0 \leqq \Theta \leqq 1$ definiert und hängt von Θ stetig ab, und zwar gleichgradig für alle $(x, y) \in G^+ - N$; dasselbe gilt auch für jede Ableitung von F.

Die Funktion

$$f(\Theta) = I[H + \Theta k, G^+]$$

hat also die Ableitungen

$$f'(\Theta) = \iint_{G^+} \{F_p(\bar{p}, \bar{q}) \cdot k_x + F_q(\bar{p}, \bar{q}) \cdot k_y\}\, dx\, dy$$

$$f''(\Theta) = \iint_{G^+} \{F_{pp}(\bar{p}, \bar{q}) \cdot k_x^2 + 2 F_{pq}(\bar{p}, \bar{q}) \cdot k_x k_y + F_{qq}(\bar{p}, \bar{q}) \cdot k_y^2\}\, dx\, dy.$$

Da nach dem Hilfssatz 4 und wegen $k \equiv 0$ auf G^{+*} auf einer Teilmenge von G^+ mit positivem Maß die Ungleichung $k_x^2 + k_y^2 > 0$ gilt und da die Ungleichungen (1) bestehen, gilt $f''(\Theta) > 0$ für alle Θ des Intervalls $0 \leqq \Theta \leqq 1$.

Die behauptete Ungleichung $I[H, G^+] < I[h, G^+]$ können wir nun auch in der Form $f(0) < f(1)$ schreiben. Wegen $f(1) - f(0) = f'(0) + \frac{1}{2} f''(\vartheta)$ und $f''(\vartheta) > 0$ genügt der Nachweis der Gleichung $f'(0) = 0$.

Für jedes natürliche n sei $k_n(x, y) = \operatorname{Max}\left(k(x, y) - \frac{1}{n}, 0\right)$ gesetzt. Da $h(x, y)$ und $H(x, y)$ die lokale Dehnungsschranke d haben, hat $k(x, y)$ und damit jedes $k_n(x, y)$ die lokale Dehnungsschranke $2d$. Folglich existiert ein $\Theta_0 > 0$ und ein $d' < D$ derart, daß für jedes n und jedes $(x, y) \in G^+ - N$ der Punkt $(H_x + \Theta (k_n)_x,\ H_y + \Theta (k_n)_y)$ der $p\,q$-Ebene in der Kreisscheibe $[p^2 + q^2 \leqq d'^2]$ liegt. Für $0 \leqq \Theta \leqq \Theta_0$

Transact. Amer. Math. Soc. **43** (1938), S. 126—166, vgl. auch d) den Encyklopädieartikel von L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus (IIC 12), S. 1320—1324).

existiert also

$$f_n(\Theta) = I[H+\Theta k_n, G^+],$$

und analog wie die Gleichung für $f'(\Theta)$ ergibt sich

$$f_n'(0) = \iint_{G^+} \{F_p(p,q)\,(k_n)_x + F_q(p,q)\,(k_n)_y\}\,dx\,dy$$

mit $p = H_x$ und $q = H_y$.

Es sei G_n^+ die Menge aller Punkte von G^+, in denen $k_n > 0$ ist. Dann gilt $G_1^+ \subset G_2^+ \subset \ldots \subset G^+$ und $\sum_n G_n^+ = G^+$. In $G^+ - G_n^+$ gilt $k_n \equiv 0$. Weil $k_n \equiv k - \frac{1}{n}$ ist in G_n^+ und das Maß von $G^+ - G_n^+$ beliebig klein ist für hinreichend großes n, ist

$$|f'(0) - f_n'(0)| = \Big|\iint_{G^+} \{F_p(p,q)\,k_x + F_q(p,q)\,k_y\}\,dx\,dy - \iint_{G^+} \{F_p(p,q)(k_n)_x + F_q(p,q)(k_n)_y\}\,dx\,dy\Big| = \Big|\iint_{G^+ - G_n^+} \{F_p(p,q)\,k_x + F_q(p,q)\,k_y\}\,dx\,dy\Big|$$

für hinreichend großes n beliebig klein. Wir sind also fertig, wenn wir noch $f_n'(0) = 0$ beweisen.

Hierzu überdecken wir $\overline{G_n^+}$ durch endlich viele offene, samt Peripherie in G^+ enthaltene Kreisscheiben, deren Summe wir mit G_n bezeichnen. Dann ist $k_n \equiv 0$ in $G^+ - G_n$. Also ist

$$f_n'(0) = \iint_{G_n} \{F_p(p,q)\,.\,(k_n)_x + F_q(p,q)\,.\,(k_n)_y\}\,dx\,dy.$$

Für jeden der beiden Summanden des Integranden schreiben wir das Integral als iteriertes Integral. Durch partielle Integration[20]) und Benutzung der Identität $k_n \equiv 0$ auf der Begrenzung G_n^* von G_n ergibt sich

$$f_n'(0) = -\iint_{G_n} k_n \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial x} F_p(H_x, H_y) + \frac{\partial}{\partial y} F_q(H_x, H_y)\Big)\,dx\,dy.$$

Da H nach Voraussetzung eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung (13), d. h. der Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial x} F_p + \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0$ ist, so folgt $f_n'(0) = 0$, was zu zeigen war.

§ 5.

Über ein spezielles Anfangswertproblem der Differentialgleichung (13).

Satz 20[21]). *Es seien* $X, Y, X', Y', \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *reelle Parameter, welche folgenden Bedingungen genügen*:

---

[20]) C. Carathéodory, Reelle Funktionen, Leipzig-Berlin 1918, S. 549, Satz 7 (für jedes feste y bzw. x ist $k_n(x,y)$ eine totalstetige Funktion von x bzw. y)

[21]) Anschaulicher gesprochen, handelt es sich um folgendes: In der xy-Ebene liegt vor erstens das System $\mathfrak{S}$ aller Kreisscheiben $(x-X)^2 + (y-Y)^2$

(14) $$X^2+Y^2 \leqq A^2 \quad (A>0 \text{ und fest})$$

(15) $$a^2 \leqq (X-X^1)^2+(Y-Y^1)^2 \leqq b^2 \quad (0<a \leqq b,\ a \text{ und } b \text{ fest})$$

(16) $$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P.$$

(P eine beschränkte, abgeschlossene Menge des reellen euklidischen E_n). Für jedes solche Parametersystem seien auf der Kreisscheibe

(17) $$(x-X)^2+(y-Y)^2 < r_1^2$$

($r_1 < a$ fest, von den Parametern unabhängig)

der xy-Ebene zwei Funktionen $U(x,y) = U(x, y, X, Y, X^1, Y^1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $N(x,y) = N(x, y, X, Y, X^1, Y^1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ gegeben; sie seien regulär analytische Funktionen ihrer $n+6$ Argumente $x, \ldots, \alpha_n$ auf der Menge (14)—(17)[22] *und es gelte dort*

(18) $$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + N^2 < D^2,$$

wobei $\frac{\partial}{\partial t}$ die Ableitung im Punkt (x,y) nach der Tangente des Kreises der xy-Ebene um (X^1, Y^1) durch (x,y) ist[23]*. Dann gibt es ein r mit $0<r<r_1$ derart, daß für jedes Parametersystem $X, \ldots, \alpha_n$ mit der Eigenschaft* (14)—(16) *in der Kreisscheibe*

(19) $$(x-X)^2+(y-Y)^2 < r^2$$

der xy-Ebene eine Lösung

$$\Phi(x,y) = \Phi(x, y, X, Y, X^1, Y^1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

der Differentialgleichung (13) *existiert, die auf dem Durchschnitt der Kreisscheibe* (19) *mit dem Kreise*

(20) $$(x-X^1)^2+(y-Y^1)^2 = (X-X^1)^2+(Y-Y^1)^2$$

$= r^2$ mit festem r und beliebigen Mittelpunkten (X, Y), die nur der Bedingung $X^2+Y^2 \leqq A^2$ genügen; zweitens wird für jede Kreisscheibe aus $\mathfrak{S}$ das System $\mathfrak{T}$ aller Kreislinien $(x-X^1)^2+(y-Y^1)^2 = \varrho^2$ durch den Mittelpunkt (X, Y) dieser Kreisscheibe betrachtet, deren Radien ϱ nur der Bedingung $0<a \leqq \varrho \leqq b < +\infty$ unterworfen sind (deren Mittelpunkte (X^1, Y^1) also alle Punkte (x,y) des Kreisringes $a^2 \leqq (x-X)^2+(y-Y)^2 \leqq b^2$ um (X, Y) durchlaufen). Behauptet wird, daß (bei geeigneter Wahl von r) in jeder Kreisscheibe aus $\mathfrak{S}$ und für jede Kreislinie des zugehörigen $\mathfrak{T}$ eine Lösung Φ der Differentialgleichung (13) existiert, die auf dieser Kreislinie, soweit sie in der Kreisscheibe liegt, den Anfangsbedingungen (21) genügt. Diese Anfangsbedingungen schreiben für Φ selbst und ihre Ableitungen nach der äußeren Normalen der Kreislinie Werte U und N vor. Diese Werte müssen natürlich so gewählt sein, daß die Steigung $\sqrt{\Phi_x^2+\Phi_y^2}$, die sie Φ aufzwingen, kleiner als D ist (sonst wäre das Problem von vornherein unlösbar, da $F(p,q)$ nur für $p^2+q^2 (= \Phi_x^2+\Phi_y^2) < D^2$ definiert ist); dies wird durch (18) erreicht.

[22]) Also U und N für jedes $(x^0, \ldots \alpha_n^0)$ der Menge (14)—(17) in einer Umgebung von $(x^0, \ldots, \alpha_n^0)$ definiert und in eine Potenzreihe entwickelbar.

[23]) Wir orientieren entsprechend dem positiven Umlaufssinn des Kreises $(x-X^1)^2+(y-Y^1)^2 = \text{konst.}$

der xy-Ebene durch den Mittelpunkt von (19) *den Anfangsbedingungen*

$$\Phi = U, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = N \tag{21}$$

genügt, wobei $\frac{\partial}{\partial n}$ *die Ableitung nach der äußeren Normalen von* (20) *bedeutet; die Funktionen* Φ, Φ_x *und* Φ_y *sind stetige Funktionen der* $n+6$ *Argumente* $x, \ldots, \alpha_n$ *in der Menge* (14)—(17), (19) *und, bei festen Parametern* $X, \ldots, \alpha_n$, *regulär analytische Funktionen von* (x, y) *in der Kreisscheibe* (19).

Beweis. Wir setzen $x - X = \xi$, $y - Y = \eta$, $X^1 - X = x_1$ und $Y^1 - Y = y_1$. Die Bedingung (15) lautet dann $a^2 \leqq x_1^2 + y_1^2 \leqq b^2$ und die Bedingungen (14) und (16) haben zur Folge: $(X^1, Y^1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \overline{P'}$, wobei P' die beschränkte Menge aller Punkte $(z_1, \ldots, z_{n+2})$ des E_{n+2} mit $z_1^2 + z_2^2 < (A+b)^2$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P$ ist. Die Kreisscheiben (17) und (19) gehen über in $\xi^2 + \eta^2 < r_1^2$ bzw. $< r^2$, der Kreis (20) in $(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2$, die Funktionen U, N und Φ in

$$U(\xi + X^1 - x_1,\ \eta + Y^1 - y_1,\ X^1 - x_1,\ Y^1 - y_1,\ X^1, Y^1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$
$$= u(\xi, \eta, x_1, y_1, X^1, Y^1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ n(\xi, \ldots, \alpha_n) \text{ und } \varphi(\xi, \ldots, \alpha_n).$$

Schreiben wir also wieder x statt ξ; y statt η; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ statt $X^1, Y^1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$; U, N und Φ statt u, n und φ, so ergibt sich die folgende zu Satz 20 äquivalente *reduzierte Behauptung.*

Es seien $x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ reelle Parameter, welche folgenden Bedingungen genügen:

$$a^2 \leqq x_1^2 + y_1^2 \leqq b^2 \qquad (0 < a \leqq b,\ a \text{ und } b \text{ fest}) \tag{22}$$

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P \quad (P \text{ beschränkte, abgeschlossene Menge des } E_n). \tag{23}$$

Für jedes solche Parametersystem seien auf der Kreisscheibe

$$x^2 + y^2 < r_1^2 \qquad (r_1 < a,\ a \text{ fest, von den Parametern unabhängig}) \tag{24}$$

der xy-Ebene zwei Funktionen $U(x, y) = U(x, y, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $N(x, y) = N(x, y, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ gegeben. Sie seien regulär analytische Funktionen ihrer $n+4$ Argumente $x, \ldots, \alpha_n$ auf der Menge (22)—(24) und es gelte dort

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + N^2 < D^2, \tag{25}$$

wobei $\frac{\partial}{\partial t}$ die Ableitung im Punkt (x, y) nach der Tangente des Kreises der xy-Ebene um (x_1, y_1) durch (x, y) ist. Dann gibt es ein r mit $0 < r < r_1$ derart, daß für jedes Parametersystem $x_1, \ldots, \alpha_n$ mit der Eigenschaft (22), (23) in der Kreisscheibe

$$x^2 + y^2 < r^2 \tag{26}$$

eine Lösung

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, y, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

der Differentialgleichung (13) existiert, die auf dem Durchschnitt der Kreisscheibe (26) mit dem Kreis

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = x_1^2+y_1^2 \tag{27}$$

durch $(0,0)$ den Anfangsbedingungen

$$\Phi = U, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = N \tag{28}$$

genügt, wobei $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung nach der äußeren Normalen von (27) bedeutet; die Funktionen Φ, Φ_x und Φ_y sind stetige Funktionen der $n+4$ Argumente im Bereich (22)—(24), (26) und bei festen Parametern $x_1, \ldots, \alpha_n$ regulär analytische Funktionen von (x, y) in der Kreisscheibe (26).

Wir brauchen also nur diese reduzierte Behauptung zu beweisen.

Für jedes Parameterpaar (x_1, y_1) mit (22) betrachten wir die Transformation

$$\begin{aligned} x &= x_1(1-e^u\cos v)+y_1 e^u \sin v = x(u,v) \\ y &= -x_1 e^u \sin v + y_1(1-e^u\cos v) = y(u,v). \end{aligned} \tag{29}$$

Durch sie wird die xy-Ebene, aufgeschnitten längs desjenigen Halbstrahles mit dem Anfangspunkt (x_1, y_1), dessen rückwärtige Verlängerung durch den Ursprung geht, abgebildet auf den Streifen $[-\pi < v < \pi]$ der uv-Ebene; dabei wird jeder Kreis $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = c^2$ abgebildet auf die Strecke $u = \ln c - \ln\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ dieses Streifens und der Punkt $(x = 0, y = 0)$ auf den Punkt $(u = 0, v = 0)$.

Nach den bekannten Formeln

$$u_x = \frac{y_v}{x_u y_v - x_v y_u}, \quad u_y = \frac{-x_v}{x_u y_v - x_v y_u}$$

$$v_x = \frac{-y_u}{x_u y_v - x_v y_u}, \quad v_y = \frac{x_u}{x_u y_v - x_v y_u}$$

ergibt sich

$$u_x = \frac{1}{e^u(x_1^2+y_1^2)}(-x_1\cos v + y_1 \sin v), \quad u_y = \frac{1}{e^u(x_1^2+y_1^2)}(-x_1 \sin v - y_1 \cos v),$$

$$v_x = \frac{1}{e^u(x_1^2+y_1^2)}(x_1 \sin v + y_1 \cos v), \quad v_y = \frac{1}{e^u(x_1^2+y_1^2)}(-x_1\cos v + y_1 \sin v)$$

und hieraus

$$u_x^2+u_y^2 = v_x^2+v_y^2 = u_x^2+v_x^2 = u_y^2+v_y^2 = \frac{1}{e^{2u}(x_1^2+y_1^2)} \neq 0,$$

$$u_x v_x + u_y v_y = u_x u_y + v_x v_y = 0.$$

Jede Kurve $\mathfrak{K} = [x = x(s), y = y(s)]$ $(0 \leqq s \leqq l)$, wobei der Parameter s die Bogenlänge bedeutet, wird durch (29) auf eine Kurve $\mathfrak{L} = [u = u(x(s), y(s)) = u(s), v = v(x(s), y(s)) = v(s)]$ abgebildet, deren Länge

$$l = \int_0^l \sqrt{u'^2(s) + v'^2(s)}\, ds = \int_0^l \sqrt{(u_x^2 + v_x^2)\, x_s^2 + (u_y^2 + v_y^2)\, y_s^2}\, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \int_0^l \frac{1}{e^{u(s)}}\, ds$$

ist. Nach (22), (24) und (29) ist

$$\frac{1}{e^u} = \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} < \frac{b}{a - r_1}.$$

Damit erhalten wir $\bar{l} < \frac{b}{a(a - r_1)}\, l$. Ist nun $\mathfrak{K}$ speziell die Strecke von $(0, 0)$ nach einem beliebigen Punkt (x, y) von (26), so ist $l < r$ und somit $\bar{l} < \frac{b}{a(a - r_1)}\, r$. Der Endpunkt der Kurve $\mathfrak{L}$, d. h. der Bildpunkt (u, v) von (x, y) hat daher vom Anfangspunkt der Kurve $\mathfrak{L}$, d. h. vom Ursprung $(0, 0)$ der uv-Ebene einen Abstand $< \frac{b}{a(a - r_1)}\, r$. Zu jedem $\tau > 0$ (ein solches τ werden wir auf S. 741 festlegen) können wir also $r > 0$ so klein wählen, daß das Bild der Kreisscheibe (26) im Quadrat $|u| < \tau$, $|v| < \tau$ liegt, und zwar gleichmäßig für alle Parameterpaare (x_1, y_1) mit der Eigenschaft (22). Analog zeigt man $l < (b + r_1)\, \bar{l}$ und hieraus folgt: wählt man σ hinreichend klein, und dies tun wir hiermit, so ist das Urbild des Quadrates $|u| \leqq \sigma$, $|v| \leqq \sigma$ in der Kreisscheibe $x^2 + y^2 < r_0^2$ enthalten für jedes Parameterpaar (x_1, y_1) mit der Eigenschaft (22).

Die Funktion $\Phi(x, y)$ gehe durch die Transformation (29) über in $\Phi(x(u, v), y(u, v)) = z(u, v)$. Die erste Anfangsbedingung (28) geht also, wenn wir $U(x(0, v), y(0, v)) = \chi(v)$ setzen, über in

$$z(0, v) = \chi_1(v). \tag{30}$$

Für die zweite bemerken wir zunächst, daß der Kreis (27), der durch (29) auf die Strecke $[u = 0,\ -\pi < v < \pi]$ abgebildet wird, die Parameterdarstellung

$$x = x_1 - x_1 \cos v + y_1 \sin v,\quad y = y_1 - x_1 \sin v - y_1 \cos v$$

hat und daher die Richtungscosinus der Normalen dieses Kreises gleich

$$\cos nx = \frac{-x_1 \cos v + y_1 \sin v}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}},\quad \cos ny = \frac{-x_1 \sin v - y_1 \cos v}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

sind. Also gilt auf (27) für eine beliebige Funktion

$$f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) = g(u, v)$$

mit stetigen Ableitungen f_x und f_y die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial n} f(x, y) = f_x \cdot \cos nx + f_y \cdot \cos ny$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} (f_x \cdot (-x_1 \cos v + y_1 \sin v) + f_y \cdot (-x_1 \sin v - y_1 \cos v))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \left(f_x \frac{\partial x}{\partial u} + f_y \frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \frac{\partial g}{\partial u}.$$

Analog ist

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \frac{\partial g}{\partial v}.$$

Setzen wir $N(x(0, v), y(0, v)) \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \chi_1(v)$, so geht also die zweite Anfangsbedingung (28) über in

$$z_u(0, v) = \chi_2(v). \tag{31}$$

Da $U(x, y) = U(x, y, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $N(x, y) = N(x, y, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ regulär analytisch sind in jedem Punkt des Bereiches (22)—(24), sind $\chi_1(v) = \chi_1(v, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $\chi_2(v) = \chi_2(v, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ regulär analytisch in jedem Punkt des Bereiches $[|v| \leqq \sigma$, (22), (23)].

Die Differentialgleichung (13) geht durch die Transformation (29) über in

$$\begin{aligned} &F_{pp}(z_u u_x + z_v v_x,\ z_u u_y + z_v v_y).\ (z_{uu} u_x^2 + 2 z_{uv} u_x v_x + z_{vv} v_x^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx}) \\ &\quad + 2 F_{pq}(\ldots)(z_{uu} u_x u_y + z_{uv}(u_x u_y + u_y v_x) + z_{vv} v_x v_y + z_u u_{xy} + z_v v_{xy}) \\ &\quad + F_{qq}(\ldots)(z_{uu} u_y^2 + 2 z_{uv} u_y v_y + z_{vv} v_y^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy}) = 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\{F_{pp}(z_u u_x + z_v u_x,\ z_u u_y + z_v v_y) u_x^2 + 2 F_{pq}(\ldots) u_x u_y + F_{qq}(\ldots) u_y^2\} z_{uu} \\ &\quad + 2\{F_{pp}(\ldots) u_x v_x + F_{pq}(\ldots)(u_x v_y + u_y v_x) + F_{qq}(\ldots) u_y v_y\} z_{uv} \\ &\quad + \{F_{pp}(\ldots) v_x^2 + 2 F_{pq}(\ldots) v_x u_y + F_{qq}(\ldots) v_y^2\} z_{vv} \\ &\quad + \{F_{pp}(\ldots) u_{xx} + 2 F_{pq}(\ldots) u_{xy} + F_{qq}(\ldots) u_{yy}\} z_u \\ &\quad + \{F_{pp}(\ldots) v_{xx} + 2 F_{pq}(\ldots) v_{xy} + F_{qq}(\ldots) v_{yy}\} z_v = 0, \end{aligned}$$

oder kürzer

$$H^{(1)} z_{uu} + H^{(2)} z_{uv} + H^{(3)} z_{vv} + H^{(4)} z_u + H^{(5)} z_v = 0.$$

Dabei sind die $H^{(i)}$ Funktionen von x_1, y_1, u, v, z_u, z_v, definiert und regulär analytisch für

$$(z_u u_x + z_v v_x)^2 + (z_u u_y + z_v v_y)^2 < D^2,$$

also wegen

$$\begin{aligned} &(z_u u_x + z_v v_x)^2 + (z_u u_y + z_v v_y)^2 \\ &= z_u^2 (u_x^2 + u_y^2) + 2 z_u z_v (u_x v_x + u_y v_y) + z_v^2 (v_x^2 + v_y^2) = (z_u^2 + z_v^2) \frac{1}{e^{2u}(x_1^2 + y_1^2)} \end{aligned}$$

in allen Punkten des reellen $(x_1, y_1, u, v, z_u, z_v)$-Raumes mit

$$(z_u^2 + z_v^2) \frac{1}{e^{2u}(x_1^2 + y_1^2)} < D^2.$$

Wegen der Regularität des Variationsproblems (2), d. h. wegen $F_{pp} > 0$ und $F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2 > 0$ ist $F_{pp} u_x^2 + 2 F_{pq} u_x u_y + F_{qq} u_y^2 = H^{(1)} > 0$, da $u_x^2 + u_y^2 \neq 0$ ist. Folglich können wir schreiben

$$z_{uu} = -\frac{H^{(2)}}{H^{(1)}} z_{uv} - \frac{H^{(3)}}{H^{(1)}} z_{vv} - \frac{H^{(4)}}{H^{(1)}} z_u + \frac{H^{(5)}}{H^{(1)}} z_v,$$

oder

$$z_{uu} = f(u, v, z_u, z_v, z_{uv}, z_{vv}), \tag{32}$$

wobei f wegen (29) auch noch von den Parametern x_1 und y_1 abhängt und zwar ist f regulär analytisch im Gebiet

$$(z_u^2 + z_v^2)\frac{1}{e^{2u}(x_1^2 + y_1^2)} < D^2$$

des reellen $(x_1, y_1, u, v, z_u, z_v, z_{uv}, z_{vv})$-Raumes.

Nach einem bekannten Verfahren[24]) setzen wir

$$u = u_1,\ v = u_2,\ z = u_3,\ z_u = u_4,\ z_v = u_5,\ z_{uu} = u_6,\ z_{uv} = u_7,\ z_{vv} = u_8.$$

Dann ist das Anfangswertproblem (30), (31) äquivalent mit folgendem Anfangswertproblem für u_1 bis u_8 als Funktionen von ξ, η (wobei in der Gleichung für $\frac{\partial u_6}{\partial \xi}$ statt der Argumente $u, v, \ldots, z_{vv}$ von $f_u, \ldots, f_{z_{vv}}$ überall $u_1, u_2, u_4, u_5, u_7, u_8$ einzusetzen sind):

$$(33)\quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \frac{\partial u_2}{\partial \eta},\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial u_3}{\partial \xi} = u_4 \frac{\partial u_2}{\partial \eta},\ \frac{\partial u_4}{\partial \xi} = u_6 \frac{\partial u_2}{\partial \eta},\ \frac{\partial u_5}{\partial \xi} = \frac{\partial u_6}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u_6}{\partial \xi} = (f_u + f_{z_u} u_6)\frac{\partial u_2}{\partial \eta} + f_{z_v}\frac{\partial u_4}{\partial \eta} + f_{z_{uv}}\frac{\partial u_6}{\partial \eta} + f_{z_{vv}}\frac{\partial u_7}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u_7}{\partial \xi} = \frac{\partial u_6}{\partial \eta},\ \frac{\partial u_8}{\partial \xi} = \frac{\partial u_7}{\partial \eta}, \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} u_1(0,\eta) = 0,\ u_2(0,\eta) = \eta, \\ u_3(0,\eta) = \chi_1(\eta),\ u_4(0,\eta) = \chi_2(\eta),\ u_5(0,\eta) = \chi_1'(\eta), \\ u_6(0,\eta) = f(0,\eta,\chi_2(\eta),\chi_1'(\eta),\chi_2'(\eta),\chi_1''(\eta)), \\ u_7(0,\eta) = \chi_2'(\eta),\ u_8(0,\eta) = \chi_1''(\eta), \end{cases}$$

oder kürzer

$$(35)\quad \frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{8} G_{ik}(u_1, \ldots, u_8)\frac{\partial u_k}{\partial \eta}, \qquad (i = 1, \ldots, 8)$$

$$(36)\quad u_i(0,\eta) = g_i(\eta).$$

Dabei sind die G_{ik} regulär analytische Funktionen der acht Argumente $u_1, \ldots, u_8$ und der zwei Parameter x_1, y_1 im Gebiet

$$(37)\quad (u_4^2 + u_5^2)\frac{1}{e^{2u_1}(x_1 + y_1^2)} < D^2$$

des reellen $(x_1, y_1, u_1, \ldots, u_8)$-Raumes. Die g_i sind regulär analytische Funktionen von $\xi, \eta, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ im Bereich, definiert durch die Beziehungen (22) und (23), sowie

$$(38)\quad \xi = 0^{25}),\quad |\eta| \leqq \sigma$$

---

[24]) R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Berlin 1937, II. Bd.. S. 36—44. Wir führen das folgende nur aus, um die Stetigkeit von Φ in (22), (23), (26) zu beweisen.

[25]) Dies bedeutet, daß die g_i von ξ nicht abhängen.

und

$$(\chi_1'^2(\eta) + \chi_2^2(\eta)) \cdot \frac{1}{x_1^2 + y_1^2} < D^2. \tag{39}$$

Nun ist $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \chi_1'(\eta)$ und $N = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \chi_2(\eta)$ nach S. 738. Da $x^2 + y^2 < r_1^2$ aus $\xi = 0$, $|\eta| \leqq \sigma$ folgt nach Wahl von σ (S. 737) und $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + N^2 < D^2$ ist für $x^2 + y^2 < r_1^2$ nach (25), so ist also die Ungleichung (39) erfüllt, wenn (38) gilt. Die g_i sind daher regulär analytische Funktionen in der in sich kompakten Menge (22), (23), (38).

Folglich existiert ein (von $x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ unabhängiges) ϱ mit der Eigenschaft $0 < \varrho \leqq \sigma$ derart, daß für jedes der Bedingung

$$|\eta| \leqq \varrho \tag{40}$$

genügende komplexe η und jedes reelle $(n+2)$-Tupel $x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, welches den Bedingungen (22) und (23) genügt, das $(n+3)$-Tupel $\eta, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ enthalten ist in der offenen Menge des $(n+3)$-dimensionalen komplexen Raumes, in welcher die acht Funktionen g_i regulär analytisch sind. Daher können wir diese Funktionen entwickeln in Potenzreihen

$$g_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^i \eta^\nu, \tag{41}$$

konvergent im Bereich (40); dabei sind die Koeffizienten a_ν^i (bis auf konstante Faktoren gleich den Ableitungen der g_i nach η im Punkt $\eta = 0$, also) stetige Funktionen der Parameter $x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ im Bereich (22), (23) und genügen nach der Cauchyschen Abschätzungsformel der Ungleichung

$$|a_\nu^i| \leqq \frac{M}{\varrho^\nu}, \tag{42}$$

wobei M eine gemeinsame obere Schranke der Funktionen g_i im Bereich (22), (23) ist.

Ganz analog zeigt man die Existenz einer Zahl $r > 0$ und einer Zahl M (die man sofort gleich der soeben erhaltenen Zahl M nach eventueller Vergrößerung derselben annehmen kann), so daß folgendes gilt: Für jedes Paar x_1, y_1 mit der Eigenschaft (22) und jedes 8-Tupel $u_1, \ldots, u_8$ mit

$$|u_i - u_i^0| < r \qquad (i = 1, \ldots, 8) \tag{43}$$

$$G_{ik}(u_1, \ldots, u_8) = \sum_{\nu_1 \ldots \nu_8 = 0}^{\infty} b_{\nu_1 \ldots \nu_8}^{ik} (u_1 - u_1^0)^{\nu_1} \ldots (u_8 - u_8^0)^{\nu_8} \quad (u_i^0 = g_i(0)). \tag{44}$$

Die Koeffizienten $b_{\nu_1 \ldots \nu_8}^{ik}$ sind stetige Funktionen von x_1, y_1 im Bereich (22) und genügen der Ungleichung

$$|b_{\nu_1 \ldots \nu_8}^{ik}| \leqq \frac{M}{r^{\nu_1 + \cdots + \nu_8}}. \tag{45}$$

Mithin ist das Problem

$$\frac{\partial v_i}{\partial \xi} = \frac{M}{1 - \frac{v_1 + \cdots + v_8}{r}} \sum_{k=1}^{8} \frac{\partial v_k}{\partial \eta}, \quad v_i(0, \eta) = \frac{M\varrho}{\varrho - \eta} \qquad (i = 1, \ldots, 8),$$

in dem keinerlei Parameter neben den unabhängigen Variablen ξ, η und den abhängigen Variablen $v_1, \ldots, v_8$ vorkommen, ein majorantes Problem für das Problem (35), (36), welche Werte die darin vorkommenden Parameter $x_1, \ldots, \alpha_n$ auch haben mögen, sofern sie nur den Bedingungen (22), (23) genügen. Nun existiert in einem Gebiet

$$|\xi| < \tau, \quad |\eta| < \tau \qquad (\tau \leqq \varrho)$$

eine Lösung

$$v_i(\xi, \eta) = \sum_{k,l=1}^{\infty} C^i_{k,l} \xi^k \eta^l \qquad (i = 1, \ldots, 8)$$

des majoranten Problems. Folglich hat auch das Problem (35), (36) für jedes den Bedingungen (22), (23) genügende Parametersystem $x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Lösung

$$u_i(\xi, \eta) = u_i^0 + \sum_{k,l=0}^{\infty} c^i_{k,l} \xi^k \eta^l \qquad (i = 1, \ldots, 8)$$

im Gebiet $|\xi| < \tau$, $|\eta| < \tau$. Die Koeffizienten $c^i_{k,l}$ sind Polynome

$$P^i_{k,l}(a^i_\nu, b^{is}_{\nu_1 \ldots \nu_8})$$

in den a^i_ν und $b^{is}_{\nu_1 \ldots \nu_8}$, also stetige Funktionen von $x_1, \ldots, \alpha_n$ mit dem Definitionsbereich (23), (24). Sie genügen den Ungleichungen

$$|c^i_{k,l}| \leqq C^i_{k,l}.$$

Für jedes positive $\tau' < \tau$ konvergiert im Bereich $|\xi| \leqq \tau'$, $|\eta| \leqq \tau'$ die Reihe $\sum_{k,l=0}^{\infty} C^i_{k,l} |\xi|^k |\eta|^l$ gleichmäßig. Also konvergiert auch die Reihe $\sum_{k,l}^{\infty} |c^i_{k,l}| |\xi|^k |\eta|^l$ gleichmäßig im Bereich $|\xi| \leqq \tau'$, $|\eta| \leqq \tau'$, (22), (23). Mithin ist $u_i(\xi, \eta)$ $(i = 1, \ldots, 8)$ eine stetige Funktion von $(\xi, \eta, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ im Bereich $|\xi| \leqq \tau'$, $|\eta| \leqq \tau'$, (22), (23). Analog zeigt man, daß auch die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u_i(\xi, \eta) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} u_i(\xi, \eta)$$

stetige Funktionen im selben Bereich sind $(i = 1, \ldots, 8)$. Da τ' eine beliebige positive Zahl $< \tau$ ist, gelten diese Stetigkeitsbehauptungen auch für $|\xi| < \tau$, $|\eta| < \tau$ statt $|\xi| \leqq \tau'$, $|\eta| \leqq \tau'$. Im Quadrat $|\xi| < \tau$, $|\eta| < \tau$ sind die Funktionen u_i, $\frac{\partial u_i}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial u_i}{\partial \eta}$ sogar regulär analytische Funktionen von (ξ, η).

Nach den beiden ersten Gleichungen von (33) und (34) ist $u_1 = \xi$, $u_2 = \eta$. Da wir $u_1 = u$ und $u_2 = v$ gesetzt hatten, ist also $u = \xi$ und $v = \eta$. Die Funktion $u_3(\xi, \eta) = u_3(\xi, \eta, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = z(u, v) = z(u, v, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ geht durch (29) über in eine Lösung $\Phi(x, y) = \Phi(x, y, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ des Anfangswertproblems (13), (28); dabei kann (x, y) zumindest die Kreisscheibe (26) durchlaufen, wenn wir das $r \leqq r_1$ so klein wählen, daß das Bild von (26) bei der Abbildung (29) im Quadrat $|u| < \tau, |v| < \tau$ für jedes Paar (x_1, y_1) mit der Eigenschaft (22) liegt (vgl. S. 737). Da u_3 von $(\xi, \eta, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ im Bereich $|\xi| < \tau, |\eta| < \tau$, (22), (23) stetig und von (ξ, η) im Quadrat $|\xi| < \tau, |\eta| < \tau$ regulär analytisch abhängt, so hängt Φ von $(x, y, x_1, y_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ im Bereich (22), (23), (26) stetig und von x, y in der Kreisscheibe (26) regulär analytisch ab. Dasselbe gilt für

$$\Phi_x = \frac{\partial u_3}{\partial \xi} u_x + \frac{\partial u_3}{\partial \eta} v_x \quad \text{und} \quad \Phi_y = \frac{\partial u_3}{\partial \xi} u_y + \frac{\partial u_3}{\partial \eta} v_y.$$

Damit ist der Satz 20 bewiesen.

§ 6.

Beweis des Satzes 1.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß

$$r_0 < +\infty, \quad c_0 < +\infty.$$

ist.

Für jedes $i = 1, 2, \ldots, 5$ setzen wir

$$(46) \qquad \begin{aligned} d_i &= d_0 + i\frac{D - d_0}{6}, \text{ falls } D < +\infty \\ d_i &= d_0 + i, \text{ falls } D = +\infty \text{ ist.} \end{aligned}$$

Dann bestehen die Ungleichungen

$$(47) \qquad d_0 < d_1 < \ldots < d_5 < D.$$

Für jeden Punkt (X, Y, Z) des xyz-Raumes mit

$$(48) \qquad X^2 + Y^2 \leqq 1, \ |Z| \leqq 1$$

betrachten wir alle Kugeln $\tilde{K} \equiv$

$$(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 + (z - \tilde{z})^2 = c_0^2$$

mit der Eigenschaft, daß erstens der Punkt (X, Y, Z) auf der unteren Hälfte

$$z = U(x, y) \equiv \tilde{z} - \sqrt{c_0^2 - (x - \tilde{x})^2 - (y - \tilde{y})^2}$$

von $\tilde{K}$ liegt (also $Z = U(X, Y)$ ist) und zweitens für die Zahlen

$$\frac{\partial U}{\partial x}(X, Y) = \alpha, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(X, Y) = \beta$$

die Ungleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqq d_1^2 \tag{49}$$

erfüllt ist. — Wir bemerken noch:

$$\tilde{x} = X - \frac{\alpha c_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \tilde{y} = Y - \frac{\beta c_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \tilde{z} = Z + \frac{c_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}},$$

also

$$U(x, y) = U(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta).$$

Es sei r_1 die größte Zahl $\leqq \frac{r_0}{2}$ derart, daß für jeden Punkt (X, Y) der xy-Ebene mit $X^2 + Y^2 \leqq 1$ die ganze Kreisscheibe

$$(x-X)^2 + (y-Y)^2 < r_1^2 \tag{50}$$

der xy-Ebene im Definitionsbereich von $U(x, y) = U(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta)$ für alle $|Z| \leqq 1$ und alle α, β mit (49) enthalten ist und für diese Funktionen $U(x, y)$ in (50) überall die Ungleichung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}(x, y)\right)^2 \leqq d_2^2$$

erfüllt ist. Diese Zahl r_1 ist positiv, endlich und abhängig nur von c_0 und d_2, also, da d_2 wegen (46) eine Funktion von d_0 ist, nur von c_0 und d_0:

$$r_1 = r_1(c_0, d_0).$$

Die Funktion $U(x, y) = U(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta)$ hängt von den unabhängigen Variablen x, y und den Parametern $X, Y, Z = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \alpha_3$ regulär analytisch ab im Bereich (48)—(50).

Es seien X^1 und Y^1 zwei weitere Parameter. Für je zwei der Bedingung

$$(X-X^1)^2 + (Y-Y^1)^2 = r_0^2 \tag{51}$$

genügende Punkte (X, Y) und (X^1, Y^1) der xy-Ebene sei $L = L(X, Y, X^1, Y^1)$ der Kreis

$$(x-X^1)^2 + (y-Y^1)^2 = r_0^2 \tag{52}$$

der xy-Ebene um (X^1, Y^1) durch (X, Y).

Da in jedem Punkt (x, y) der Kreisscheibe (50)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \leqq d_2^2$$

gilt, so besteht in jedem Punkt (x, y) des Durchschnittes des Kreises L mit der Kreisscheibe (50) auch die Ungleichung

$$T^2 \leqq d_2^2$$

für die Steigung

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{y-Y^1}{\sqrt{(x-X^1)^2+(y-Y^1)^2}} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{x-X^1}{\sqrt{(x-X^1)^2+(y-Y^1)^2}}$$
$$\equiv T(x, y) \equiv T(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$$

der Fläche $z = U(x, y)$ längs der Tangente t des Kreises L in (x, y), wobei t entprechend dem positiven Umlaufssinn dieses Kreises orientiert ist. Die Funktion T ist eine regulär analytische Funktion ihrer neun Argumente im Bereich (48)—(51). Dasselbe gilt dann auch für die Funktion

$$N = \sqrt{d_3^2 - T^2} \qquad (> 0)$$

und im Bereich (48)—(51) ist

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + N^2 = d_3^2. \tag{53}$$

Nach Satz 20[26]) gibt es also ein (größtes) r_2 mit $0 < r_2 \leqq \frac{r_1}{2}$ derart, daß für jedes Parametersystem $X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1$ des Bereiches (48), (49), (51) in der Kreisscheibe

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 < r_2^2 \tag{54}$$

um (X, Y) eine Lösung

$$\Phi(x, y) \equiv \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$$

der Eulerschen Differentialgleichung (13) existiert, die auf dem Durchschnitt der Kreisscheibe (54) mit dem Kreis L durch den Mittelpunkt (X, Y) von (54) den Anfangsbedingungen

$$\Phi = U, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = N \tag{55}$$

genügt, wobei $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung nach der äußeren Normalen von L bedeutet; die Funktionen Φ, Φ_x und Φ_y sind stetige Funktionen ihrer neun Argumente im Bereich (48), (49), (51), (54) und bei festen Parametern regulär analytische Funktionen von (x, y) in der Kreisscheibe (54).

Die Zahl r_2 hängt (außer von F und D, was wir nicht hervorheben) nur ab von den den Bereich (48), (49), (51) und die Anfangsbedingungen (55) bestimmenden Zahlen r_0, c_0, d_1 und d_3; da aber d_1 und d_3 nach (46) durch d_0 eindeutig festgelegt sind, hängt r_2 nur von r_0, c_0 und d_0 ab:

$$r_2 = r_2(r_0, c_0, d_0).$$

Wir setzen

$$\operatorname{Min}\left(\frac{r_2}{2}, r\right) = r_3. \tag{56}$$

Dann ist für jeden Punkt (X, Y), welcher der Bedingung

$$X^2 + Y^2 < r_3^2 \tag{57}$$

genügt, die Kreisscheibe

$$x^2 + y^2 \leqq r_3^2 \tag{58}$$

in der Kreisscheibe (54) enthalten und enthält wegen (51) keinen Punkt $(X^1\ Y^1)$.

---

[26]) Mit $A = 1$; $a = b = r_0$; $\alpha_1 = Z$, $\alpha_2 = \alpha$, $\alpha_3 = \beta$; $P = [|Z| \leqq 1,\ \alpha^2 + \beta^2 \leqq d_1^2]$. Daß wir jetzt die Parameter X^1, Y^1 hinter die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ setzen, spielt natürlich keine Rolle.

Da Φ_x und Φ_y stetige Funktionen ihrer neun Argumente sind und auf dem Durchschnitt von L mit (58) die zweite Gleichung (55), also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sqrt{d_3^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2}$$

gilt, so folgt die Existenz einer größten positiven Zahl $b \leqq r_0$ derart, daß für jedes Parametersystem des Bereiches (48), (57), (49), (51) in jedem Punkt (x, y) des Durchschnittes der Kreisscheibe (58) mit dem L enthaltenden und zu L konzentrischen Kreisring

$$(59) \qquad (r_0 - b)^2 < (x - X^1)^2 + (y - Y^1)^2 < (r_0 + b)^2$$

die Ungleichungen

$$(60) \qquad \sqrt{d_2^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2} < \frac{\partial \Phi}{\partial n} < \sqrt{d_4^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2}$$

gelten, wobei wir mit $\frac{\partial}{\partial t}$ und $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in (x, y) nach der Tangente t bzw. der äußeren Normale n des Kreises um (X^1, Y^1) durch (x, y) bezeichnen. Die Zahl b hängt wieder nur von r_0, c_0 und d_0 ab:

$$b = b(r_0, c_0, d_0).$$

Wir setzen

$$(61) \qquad \operatorname{Min}\left(\frac{b}{2}, r_3\right) = r_4.$$

Dann ist für jeden Punkt (X, Y), welcher der Bedingung

$$(62) \qquad X^2 + Y^2 < r_4^2$$

genügt und jeden der Bedingung (51) genügenden Punkt (X^1, Y^1) die Kreisscheibe

$$(63) \qquad x^2 + y^2 \leqq r_4^2$$

im Kreisring (59) enthalten; außerdem liegt sie in der Kreisscheibe (54). Mit b und r_3 hängt auch r_4 nur von r_0, c_0 und d_0 ab:

$$r_4 = r_4(r_0, c_0, d_0).$$

Nun ist

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^2.$$

Da

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \leqq d_2^2$$

ist in jedem Punkt (x, y) der Kreisscheibe (50), insbesondere also in jedem Punkt (x, y) der Kreisscheibe (63), so gilt also in jedem Punkt (x, y) von (63)

$$\frac{\partial U}{\partial n} \leqq \sqrt{d_2^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2}$$

und folglich wegen (60)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \geqq \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Nach der ersten Gleichung (55) ist $\Phi = U$ in jedem Punkt (x, y) des Durchschnittes des Kreises L mit (63). Also ist

$$\Phi \geqq U \tag{64}$$

in jedem Punkt (x, y) von (63), der im abgeschlossenen Außenbereich des Kreises L liegt.

Nach der ersten Gleichung (55) gilt in jedem Punkt (x, y) des Durchschnittes von L mit (63)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

und folglich wegen (60)

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 < d_4^2$$

und wegen

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2$$

auch

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 < d_4^2. \tag{65}$$

Mithin existiert eine größte positive Zahl $b' \leqq b$ derart, daß die Ungleichung (65) gilt in jedem Punkt (x, y) des Durchschnittes des Kreisringes

$$(r_0 - b')^2 < (x - X^1)^2 + (y - Y^1)^2 < (r_0 + b')^2 \tag{66}$$

mit der Kreisscheibe (63) für jedes Parametersystem des Bereiches (48), (57), (49), (51). Auch b' hängt nur von r_0, c_0 und d_0 ab:

$$b' = b'(r_0, c_0, d_0).$$

Wir setzen

$$\operatorname{Min}\left(\frac{b'}{2}, r_4\right) = r_5. \tag{67}$$

Dann ist für jeden Punkt (X, Y), welcher der Bedingung

$$X^2 + Y^2 < r_5^2 \tag{68}$$

genügt, und jeden der Bedingung (51) genügenden Punkt (X^1, Y^1) die Kreisscheibe

$$x^2 + y^2 \leqq r_5^2 \tag{69}$$

im Kreisring (66) enthalten; außerdem liegt sie in der Kreisscheibe (63). Die Zahl r_5 hängt wieder nur von r_0, c_0 und d_0 ab:

$$r_5 = r_5(r_0, c_0, d_0). \tag{70}$$

Zusammenfassend haben wir also folgendes Ergebnis. Für jedes Parametersystem $(X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ des Bereiches

$$X^2 + Y^2 < r_5^2, \quad |Z| \leqq 1 \tag{71}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqq d_1^2 \tag{72}$$

$$(X - X^1)^2 + (Y - Y^1)^2 = r_0^2 \tag{73}$$

ist die Kreisscheibe

$$x^2+y^2 \leqq r_5^2 \tag{74}$$

im Definitionsbereich der Funktionen $U = U(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta)$ und $\Phi = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X', Y')$ enthalten; in jedem Punkt (x, y) von (74) gilt

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 < d_4^2; \tag{75}$$

in jedem Punkt (x, y) von (74), der im Außengebiet des Kreises $L \equiv$

$$(x-X')+(y-Y') = r_0^2 \tag{76}$$

durch den Punkt (X, Y) von (74) um den nicht in (74) liegenden Punkt (X', Y') enthalten ist, gilt

$$\Phi \geqq U \tag{77}$$

und in jedem Punkt (x, y) des Durchschnittes von (74) mit L gilt

$$\Phi = U. \tag{78}$$

Nun behaupten wir, daß die nach (70) nur von r_0, c_0 und d_0 abhängende Zahl

$$\varrho_0 = r_5 \tag{79}$$

das in unserem Satz 1 Behauptete leistet.

Es sei also R eine zugelassene Kurve, deren Projektion K in die xy-Ebene einen Durchmesser

$$\varrho < \varrho_0 \tag{80}$$

hat und welche die Eigenschaften 4 und 5 für Zahlen $r \geqq r_0$, $c \geqq c_0$ und $d \leqq d_0$, also auch für die Zahlen r_0, c_0 und d_0 hat.

Wir bezeichnen mit $\underline{R}$ die aus R durch Spiegelung an der xy-Ebene hervorgehende Kurve.

Da im Integral $\int F(h_x, h_y)\, dx\, dy = I[h, G]$ die Funktion $h(x, y)$ selbst nicht auftritt, ist die Lösbarkeit der Randwertaufgabe (2), (5) invariant gegenüber Parallelverschiebungen der gegebenen Randkurve. Wir dürfen daher sofort annehmen, daß der Koordinatenursprung $(0, 0, 0)$ auf der Kurve R liegt. Dann gelten für jeden Punkt (X, Y, Z) von R die Ungleichungen (71). Mithin ist auch das durch R gemäß der Eigenschaft 3 bestimmte, beschränkte Gebiet G in der Kreisscheibe (71) enthalten.

Nun sei (X, Y, Z) ein beliebiger, aber fester Punkt von R. Nach der Eigenschaft 4 existiert ein Kreis $L \equiv$

$$(x-X')^2+(y-Y')^2 = r_0^2$$

durch den Punkt (X, Y), dessen Innengebiet zu $\overline{G}$ fremd ist. Nach der Eigenschaft 5 existiert eine Kugel $\tilde{K} \equiv$

$$(x-\tilde{x})^2+(y-\tilde{y})^2+(z-\tilde{z})^2 = c_0^2,$$

welche R im Punkt (X, Y, Z) von oben berührt (so daß insbesondere (X, Y, Z) auf der unteren Halbkugelfläche $z = U(x, y)$ vom $\tilde{K}$ liegt) und für welche die Zahlen

$$\frac{\partial U}{\partial x}(X, Y) = \alpha, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(X, Y) = \beta$$

der Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqq d_1^2$$

genügen. Da auch die Kurve $\underline{R}$ die Eigenschaft 5 hat, existiert analog eine Kugel $\underline{\tilde{K}} =$

$$(x - \underline{\tilde{x}})^2 + (y - \underline{\tilde{y}})^2 + (z - \underline{\tilde{z}})^2 = c_0^2,$$

welche $\underline{R}$ im Punkt $(X, Y, -Z)$ von oben berührt (so daß also $(X, Y, -Z)$ auf der unteren Hälfte $z = \underline{U}(x, y)$ von $\underline{Z}$ liegt) und für welche die Zahlen

$$\frac{\partial U}{\partial x}(X, Y) = \underline{\alpha}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(X, Y) = \underline{\beta}$$

der Bedingung

$$\underline{\alpha}^2 + \underline{\beta}^2 \leqq d_1^2$$

genügen.

Wir betrachten die auf S. 744 mittels U definierte Funktion

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X', Y')$$

und analog die mittels $\underline{U}$ statt U definierten Funktionen

$$\underline{\Phi}(x, y) = \underline{\Phi}(x, y, X, Y, -Z, \underline{\alpha}, \underline{\beta}, X', Y').$$

Da $\overline{G}$ zum Innengebiet von (76) fremd ist und in (74) liegt, gilt nach (64) in ganz $\overline{G}$

$$\Phi(x, y) \geqq U(x, y), \quad \underline{\Phi}(x, y) \geqq \underline{U}(x, y) \tag{81}$$

und wegen (78) im Punkt (X, Y)

$$\Phi(X, Y) = U(X, Y), \quad \underline{\Phi}(X, Y) = \underline{U}(X, Y). \tag{82}$$

Nun berührt die Kugel $\tilde{K}$ die Kurve R im Punkt (X, Y, Z) und $\underline{\tilde{K}}$ die Kurve $\underline{R}$ im Punkt $(X, Y, -Z)$ von oben, d. h. es ist

$$U(X, Y) = Z, \quad \underline{U}(X, Y) = -Z \tag{83}$$

sowie für jeden Punkt (X', Y', Z') von R

$$U(X', Y') \geqq Z', \quad \underline{U}(X', Y') \geqq -Z'. \tag{84}$$

(Zum letzteren ist zu bemerken, daß für jeden Punkt (X', Y', Z') von R der Punkt (X', Y') in der Kreisscheibe (74), also im Definitionsbereich von $U(x, y)$ und $\underline{U}(x, y)$ liegt). Aus (81)—(84) folgt

$$-\underline{\Phi}(X, Y) = Z = \Phi(X, Y) \tag{85}$$

$$-\underline{\Phi}(X', Y') \leqq Z' \leqq \Phi(X', Y') \tag{86}$$

für den beliebigen, aber festen Punkt (X, Y, Z) und jeden beliebigen Punkt (X', Y', Z') von R.

Nun gilt in der Kreisscheibe (74) die Ungleichung (75) für die Funktion Φ und ebenso für $\bar{\Phi}$. Also ist d_4 und folglich wegen (47) auch d_5 eine globale Dehnungsschranke von Φ und $\bar{\Phi}$ auf der Kreisscheibe (74). Da K in (74) enthalten ist, so folgt hieraus, sowie aus (85) und (86), daß die Kurve R ebenfalls die globale Dehnungsschranke d_5 hat, d. h. daß die Funktion $Z = Z(X, Y)$ in K die globale Dehnungsschranke d_5 hat.

Die auf K definierte Funktion $Z(X, Y)$ mit der globalen Dehnungsschranke d_5 können wir nach Satz 14 fortsetzen zu einer in ganz $\bar{G}$ definierten Funktion $h_0(x, y)$ mit der globalen Dehnungsschranke d_5. Bezeichnen wir also mit $\mathfrak{H}$ die Menge aller in $\bar{G}$ definierten Funktionen $h(x, y)$, welche auf K mit $Z(X, Y)$ identisch sind, (für welche m. a. W. R die Randkurve der Fläche $z = h(x, y)$ ist) und die globale Dehnungsschranke d_5 haben, so ist also $\mathfrak{H}$ nicht leer.

Die untere Grenze der Integrale $I[h(x, y), G]$ für alle Funktionen $h(x, y)$ aus $\mathfrak{H}$ heiße u. Aus Gliedern von $\mathfrak{H}$ können wir eine Folge $\{h_n(x, y)\}$ bilden derart, daß $\lim I[h_n, G] = u$ ist. Nach Satz 10 können wir die Folge $\{h_n(x, y)\}$ auf $\bar{G}$ als gleichmäßig konvergent annehmen. Die Grenzfunktion $\lim h_n(x, y) = H(x, y)$ liegt in $\mathfrak{H}$, so daß also $I[H, G] \geqq u$ ist. Wegen der Unterhalbstetigkeit [17]) $\underline{\lim} I[h_n, G] \geqq I[H, G]$ ist $I[H, G] \leqq u$. Also gilt $I[H, G] = u$.

Wir behaupten, daß die Grenzfunktion $H(x, y)$ eine Lösung des Randwertproblems (2), (5) für die Kurve R ist. Einstweilen wissen wir nur, daß $H(x, y)$ eine globale (G, d_5)-Extremale ist.

Es sei also $h(x, y)$ irgendeine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$, die auf G^* mit $H(x, y)$ identisch ist, in G jedoch nicht. Wir haben die Ungleichung $I[H, G] < I[h, G]$ zu beweisen. Wir können diese Ungleichung auch in der Form $f(0) < f(1)$ schreiben, wenn wir $f(\Theta) = I[H + \Theta(h - H), G]$ setzen für $0 \leqq \Theta \leqq 1$. *Angenommen, wir hätten bereits bewiesen, daß nicht nur d_5, sondern sogar d_4 eine globale Dehnungsschranke von $H(x, y)$ ist.* Da $h(x, y)$ eine lokale Dehnungsschranke $d < +\infty$ hat, existiert nach Satz 8 ein $\delta > 0$ derart, daß $d^\delta(h, \bar{G}) \leqq 2d$ ist; als stetige Funktion ist $h(x, y)$ auf $\bar{G}$ beschränkt: $|h(x, y)| \leqq k$; dann ist die Zahl $\mathrm{Max}\left(2d, \frac{2k}{\delta}\right)$ eine globale Dehnungsschranke von $h(x, y)$ (vgl. den Beweis des Satzes 7). Mit $h(x, y)$ und $H(x, y)$ ist auch $h(x, y) - H(x, y)$ global dehnungsbeschränkt. Hieraus und der vorhin gemachten Annahme folgt, daß $H + \Theta(h - H)$ für jedes hinreichend kleine $\Theta \geqq 0$ die Zahl $d_5 > d_4$ als globale Dehnungsschranke hat. Für jedes hinreichend kleine $\Theta \geqq 0$ liegt daher $H + \Theta(h - H)$ in $\mathfrak{H}$. Für jedes solche Θ gilt also $f(\Theta) \geqq f(0) = u$. Mithin hat $f(\Theta)$ an der Stelle $\Theta = 0$ ein relatives Minimum. Wegen $f''(\Theta) > 0$ $(0 \leqq \Theta \leqq 1)$ (S. 732)

ist dieses relative Minimum sogar ein absolutes Minimum, d. h. es ist $f(0) < f(\Theta)$ für $0 < \Theta \leqq 1$, insbesondere also $f(0) < f(1)$, w. z. b. w.

Jetzt haben wir noch unsere Annahme zu beweisen.

Angenommen, sie wäre falsch. Dann gibt es nach Satz 15, η auf K einen Punkt (X, Y) und in $\bar{G}$ einen Punkt (x, y) derart, daß

$$\frac{|H(X,Y) - H(x,y)|}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}} > d_4 \tag{87}$$

ist. Nun ist $H(X, Y) = Z$ und daher $H(X, Y) = -\underline{\Phi}(X, Y) = \Phi(X, Y)$ nach (85). Da, wie bereits festgestellt, Φ und $\underline{\Phi}$ in der Kreisscheibe (74), also auch in $\bar{G}$ die globale Dehnungsschranke d_4 haben, so folgt aus (85), daß entweder $H(x, y) > \Phi(x, y)$ oder $H(x, y) < -\underline{\Phi}(x, y)$ ist — es gelte etwa die erstere Ungleichung — und hieraus folgt wegen (86) und $H(X', Y') = Z'$ weiter, daß (x, y) kein Punkt (X', Y') von K sein kann. Bezeichnet also G_0 die Menge aller Punkte (x, y) von $\bar{G}$, für welche $H(x, y) > \Phi(x, y)$ ist, so ist G_0 in G enthalten. Wegen der Stetigkeit von H und Φ ist G_0 eine offene Menge. Auf ihrer Begrenzung G_0^* ist $H(x, y) \equiv \Phi(x, y)$, da G_0^* zu G_0 fremd, also $H(x, y) \leqq \Phi(x, y)$ gilt auf G_0^*. Nun ist nicht nur $H(x, y)$ eine globale (G_0, d_3)-Extremale nach Satz 15, α, sondern auch $\Phi(x, y)$, da $\Phi(x, y)$ in $\bar{G}_0$ die globale Dehnungsschranke d_3 hat und als regulär analytische Lösung der Differentialgleichung (13) nach Satz 19 eine Lösung des Randwertproblems (2), (5) mit G_0 statt G ist. Also sind H und Φ zwei verschiedene globale (G_0, d_3)-Extremalen, die auf G_0^* identisch sind. Das gibt es aber nicht nach Satz 15, ε. Damit ist der gesuchte Widerspruch hergeleitet und unser Satz 1 bewiesen.

§ 7.

Beweis des Satzes 2.

Wir setzen

$$d_1 = d_0 + \frac{D - d_0}{2}, \quad \text{falls } D < +\infty$$

$$d_1 = d_0 + 1, \quad \text{falls } D = +\infty.$$

Dann gilt

$$d_0 < d_1 < D.$$

Es sei (X, Y, Z) ein beliebiger Punkt von R. Da R nach Voraussetzung die Eigenschaft 5 mit $c = +\infty$ hat, existieren zwei Ebenen $z = \Phi_1(x, y) \equiv \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1$ und $z = \Phi_2(x, y) \equiv \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2$ derart, daß erstens

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 \leqq d_1^2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \leqq d_0^2,$$

zweitens

$$\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 = Z$$

und drittens für jeden Punkt (X', Y', Z') von R

$$\alpha_1 X' + \beta_1 Y' + \gamma_1 \leqq Z' \leqq \alpha_2 X' + \beta_2 Y' + \gamma_2$$

gilt.

Also hat R die globale Dehnungsschranke d_0. Die auf K definierte Funktion $Z(X, Y)$ können wir nach Satz 14 fortsetzen zu einer in ganz $\overline{G}$ definierten Funktion $h_0(x, y)$ mit der globalen Dehnungsschranke d_0. Die Menge $\mathfrak{H}$ aller in $\overline{G}$ definierten Funktionen $h(x, y)$ mit der globalen Dehnungsschranke d_1 ist also nicht leer.

Wie auf S. 749, wobei man jetzt nur d_5 durch d_1 ersetzt, definiert man eine Funktion $H(x, y)$ und zeigt, daß sie eine Lösung des Randwertproblems (2), (5) ist, falls d_0 eine globale Dehnungsschranke von $H(x, y)$ ist. Dies ergibt sich aber genau so wie auf S. 750 die Behauptung, daß d_4 eine globale Dehnungsschranke von $H(x, y)$ ist.

(Eingegangen am 26. 8. 1947).

Geometrien mit euklidischer Metrik, in denen es zu jeder Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mehrere Nichtschneidende gibt. I.

von

F. Bachmann in Göttingen.

Ein Beispiel einer Geometrie, die im metrischen Sinne euklidisch ist, in der es aber zu jeder Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mehrere Nichtschneidende gibt, hat DEHN mit seiner „semieuklidischen" Geometrie[1]) gegeben, indem er in der Koordinatengeometrie über dem nichtarchimedisch geordneten Körper $\Omega(t)$, die den HILBERTschen Axiomen der euklidischen Geometrie[2]) mit Einschluß des Parallelenaxioms genügt (die Stetigkeitsaxiome bleiben außer Betracht), eine Teilgeometrie abgrenzte, die allen diesen Axiomen bis auf das Parallelenaxiom genügt.

Die Frage nach metrisch-euklidischen Geometrien, in denen es zu jeder Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mehrere Nichtschneidende gibt, soll nun vom Standpunkt der Begründung der Geometrie aus den elementaren Spiegelungseigenschaften allgemeiner behandelt werden. Unter einer metrisch-euklidischen Geometrie wollen wir eine Geometrie verstehen, die dem von ARNOLD SCHMIDT angegebenen, auf dem Spiegelungsbegriff aufgebauten Axiomensystem der absoluten Geometrie[3]) genügt und in der jedes Viereck mit drei rechten Winkeln ein Rechteck ist, und fragen in einer euklidischen Geometrie, d. h. in einer solchen, in der außerdem das Parallelenaxiom gilt, nach metrisch-euklidischen Teilgeometrien, und zwar in einer bestimmten euklidischen Geometrie jeweils nach den „zugehörigen" Teilgeometrien, die mit einem Punkt alle durch ihn gehenden Geraden enthalten.

Nach einem einleitenden Paragraphen, in dem die Grundbegriffe definiert und geometrische Kriterien für die metrisch-euklidischen Teilgeometrien hergeleitet werden, spezialisieren wir uns für diese erste Mitteilung auf den Fall, daß der rechte Winkel (aber nicht notwendig jeder

---

[1]) M. DEHN, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Math. Ann. **53**, S. 404—439. 1900.

[2]) D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Leipzig-Berlin 1930. — Definition des Körpers $\Omega(t)$ dort § 12.

[3]) ARNOLD SCHMIDT. Die Dualität zwischen Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten Geometrie. Math. Ann. **118**, S. 609—625, 1943.

Winkel) halbierbar ist. Unter dieser Voraussetzung lassen sich in einer euklidischen Geometrie die zugehörigen metrisch-euklidischen Teilgeometrien durch eine einzige geometrische Eigenschaft charakterisieren: die Eigenschaft, mit zwei Punkten A und B alle Punkte des Kreises über dem Durchmesser AB zu enthalten. Ist K der Koordinatenkörper der euklidischen Geometrie, so führt die algebraische Charakterisierung der zugehörigen Teilgeometrien auf den von den Elementen

$$(*) \qquad \frac{1}{1+c^2} \qquad \text{mit } c \text{ aus } K$$

erzeugten Ring $\mathfrak{E}(K)$. Er definiert die kleinste zugehörige Teilgeometrie, die die Punkte $O \equiv (0, 0)$ und $E \equiv (1, 0)$ enthält, und die Koordinatenmenge jeder anderen O und E enthaltenden zugehörigen Teilgeometrie ist ein Modul, der die Elemente von $\mathfrak{E}(K)$ als Multiplikatoren enthält. Als Beispiel bestimmen wir alle Teilgeometrien der rationalen euklidischen Geometrie. Ist P der Körper der rationalen Zahlen, so besteht der Ring $\mathfrak{E}(\mathsf{P})$ aus den ganzen und denjenigen gebrochenen rationalen Zahlen, deren gekürzte Nenner nur Primfaktoren der Form $2, 4l + 1$ enthalten.

Die Elemente (*) sind eng verwandt mit den „pythagoreischen Elementen aus K", d. h. denjenigen x aus K, zu denen es in K ein y gibt, sodaß $x^2 + y^2 = 1$ ist[4]). Die Moduln, die die Elemente des von den pythagoreischen Elementen des Koordinatenkörpers erzeugten Ringes als Multiplikatoren besitzen, definieren zwar in einer euklidischen Geometrie auch Punktmengen, die gegen alle Drehungen um einen festen Punkt und gegen die Schiebungen um Strecken, deren Endpunkte zur Menge gehören, abgeschlossen sind; jedoch sind dies, wie wir sehen werden, nicht notwendig metrisch-euklidische Teilgeometrien.

Der Gesichtspunkt, bei der Begründung der Geometrie die Eigenschaften euklidischer Metrik anzuerkennen, die Existenz des Schnittpunktes nichtparalleler Geraden jedoch als weniger einsichtig zu betrachten, führt bei den elementargeometrischen Konstruktionen auf die Frage, welche Konstruktionen man in einer euklidischen Ebene ausführen kann, wenn man auf das Schneiden beliebiger nichtparalleler Geraden verzichtet, das man üblicherweise als eine mit dem Lineal stets ausführbare Grundkonstruktion benutzt. Verwendet man das Lineal ausschließlich, um die Verbindungsgerade zweier Punkte zu ziehen, und das Rechtwinkelmaß zum Ziehen und Schneiden von Senkrechten, so sind Lineal und Rechtwinkelmaß den von uns vorausgesetzten Axiomen in folgendem Sinne charakteristisch zugeordnet: die Grundkonstruktionen,

[4]) zu den rationalen pythagoreischen Zahlen vgl. Euklids Elemente Buch X, Satz 28, Lemma 1 (etwa bei T. L. Heath, The thirteen books of Euclid's Elements III, 2nd ed. Cambridge 1926, S. 63), die Lehrbücher der Zahlentheorie (z. B. P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie II, Leipzig 1910, S. 433 ff.) und L. E. Dickson, History of the theory of numbers II, Washington 1920, S. 165 ff.

durch die diese Instrumente definiert sind, entsprechen drei Existenzaxiomen des Axiomensystems, und wenn drei Eckpunkte eines Quadrats bekannt sind, kann man alle Konstruktionen, die den hier vorausgesetzten Existenzaxiomen entsprechen, und folglich alle Konstruktionsaufgaben, die sich durch endliche Ketten dieser Konstruktionen lösen lassen, mit Lineal und Rechtwinkelmaß ausführen. Unsere Überlegungen liefern ein Konstruierbarkeitskriterium. Es ergibt sich, daß man z. B. in der gewöhnlichen reellen euklidischen Geometrie von O, E und $E' \equiv (0, 1)$ ausgehend bei dieser Verwendung von Lineal und Rechtwinkelmaß nicht das volle rationale Netz, sondern nur die Punkte, deren Koordinaten dem Ring $\mathfrak{C}(\mathbf{P})$ angehören, und ihre Verbindungsgeraden konstruieren kann.

§ 1.

Geometrisches Kriterium für metrisch-euklidische Teilgeometrien.

Unter einer (ebenen) *metrisch-euklidischen Geometrie* verstehen wir eine Geometrie, die den von Arnold Schmidt angegebenen Axiomen der absoluten Geometrie 1a, b — 6a, b und dem Axiom der euklidischen Metrik genügt:

7. Wenn es zu zwei Geraden g_1 und g_2 eine Gerade gibt, die auf beiden senkrecht steht, so steht jede Gerade, die auf g_1 senkrecht steht, auch auf g_2 senkrecht.

Dies Axiom hat zur Folge, daß keine Paare Pol-Polare in der Geometrie vorkommen und daß es zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mindestens eine Nichtschneidende gibt.

Der Beweis für diese beiden Tatsachen verläuft so: Wäre ein Punkt P zu einer Geraden g_1 polar, gälte also im Sinne der Spiegelungen $P = g_1$, so ziehe man durch P zwei verschiedene Geraden h_1 und h_2, die dann auf g_1 senkrecht stehen. Errichtet man dann auf h_1 in einem Punkt Q, der von P verschieden ist und nicht auf g_1 liegt, die Senkrechte g_2, so ist nach dem euklidischen Axiom 7 auch h_2 zu g_2 orthogonal und nach Axiom 3b $P = g_2$. Es müßte also $g_1 = g_2$ sein, und das ist nicht möglich, da Q auf g_2, aber nicht auf g_1 liegt. — Ist g_1 eine Gerade und P ein nicht auf ihr liegender Punkt, so fälle man von P das Lot h auf g_1 und errichte in P auf h die Senkrechte g_2. g_1 und g_2 haben keinen Punkt gemein, da ihr Schnittpunkt nach Axiom 3b zu h polar sein müßte.

Unter einer (ebenen) *euklidischen* Geometrie verstehen wir eine metrisch-euklidische Geometrie, in der es zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt stets auch nur eine Nichtschneidende gibt, in der also das euklidische Parallelenaxiom gilt.

K sei ein Körper, dessen Charakteristik ungleich 2 ist, und k ein Element aus K mit der Eigenschaft, daß $-k$ in K nicht Quadrat ist. Definieren wir dann in der (ebenen) affinen Geometrie über K für die Geraden $u'x + v'y + w' = 0$ und $u''x + v''y + w'' = 0$ (u', v' bzw. u'', v''

nicht gleichzeitig Null) eine Orthogonalität durch

$$(1) \qquad u'u'' + \frac{1}{k} v'v'' = 0,$$

so gelten alle genannten Axiome, wenn man unter der Spiegelung an einer Geraden g die affine Spiegelung an g, die das Büschel der zu g orthogonalen Geraden in sich überführt, und unter der Spiegelung an einem Punkt das Produkt der Spiegelungen an zwei orthogonalen Geraden durch ihn versteht. Die Formeln für die Spiegelungen an den Geraden durch den Nullpunkt O sind dabei für $y = cx$ und $x = 0$:

$$(2) \qquad x' = \frac{1 - kc^2}{1 + kc^2} x + \frac{2kc}{1 + kc^2} y, \quad y' = \frac{2c}{1 + kc^2} x - \frac{1 - kc^2}{1 + kc^2} y$$

$$\text{und } x' = -x, \; y' = y.$$

k bezeichnen wir als *Orthogonalitätskonstante.*

Umgekehrt läßt sich jede euklidische Geometrie in dieser Weise koordinatenmäßig darstellen[5]).

Wir fragen nun nach metrisch-euklidischen Teilgeometrien einer euklidischen Geometrie. Ist eine euklidische Geometrie gegeben, so verstehen wir unter einer *zugehörigen* metrisch-euklidischen Teilgeometrie eine solche, die mit einem Punkt alle durch ihn gehenden Geraden enthält. Zu jeder metrisch-euklidischen Teilgeometrie einer euklidischen Geometrie gibt es eine euklidische Geometrie, zu der sie gehört. Ihre Punkte und Geraden erhält man, wenn man die Punkte und Geraden der Teilgeometrie durch Einführung der uneigentlichen Punkte und Geraden zu einer projektiven Ebene vervollständigt; in der so vervollständigten Ebene sind alle durch einen eigentlichen Punkt gehenden Geraden eigentlich[6]).

In einer euklidischen Geometrie läßt sich eine zugehörige metrisch-euklidische Teilgeometrie bereits durch eine Menge von Punkten kennzeichnen. Eine Gerade gehört dann und nur dann zu der Teilgeometrie, wenn sie wenigstens einen Punkt der Teilgeometrie enthält. Es gilt nun das folgende Kriterium für metrisch-euklidische Teilgeometrien:

Geometrisches Kriterium, erste Form. *In einer euklidischen Geometrie bildet eine Menge von Punkten dann und nur dann eine zugehörige metrisch-euklidische Teilgeometrie, wenn sie*

1) *wenigstens zwei Punkte enthält,*

2) *mit den kollinearen Punkten P_1, P_2, P_3 den Punkt P_4 enthält, für den die Spiegelungsgleichung $P_1 P_2 P_3 = P_4$ gilt,*

3) *mit zwei Punkten A und B den Schnittpunkt einer beliebigen Geraden durch A mit der zu ihr orthogonalen Geraden durch B enthält.*

---

[5]) Über affine Ebenen, in denen eine Orthogonalität erklärt ist, vgl. auch R. Baer, The fundamental theorems of elementary geometry. An axiomatic analysis. Transactions Am. Math. Soc. **56**, S. 94—129, 1944.

[6]) vgl. hierzu die zitierte Arbeit von Arnold Schmidt, insb. Satz 30.

Die Notwendigkeit des Kriteriums ergibt sich unmittelbar. Die Bedingung 3) folgt aus dem Axiom 2b, die Bedingung 2) aus den Axiomen 4b und 2b. Wenn nämlich P_1, P_2, P_3, P_4 auf einer Geraden g liegen und g_1, g_2, g_3, g_4 die in P_1, P_2, P_3, P_4 auf g errichteten Senkrechten sind, folgt aus $P_1\ P_2\ P_3 = P_4$ die Spiegelungsgleichung $g_1\, g_2\, g_3 = g_4$ und umgekehrt; mit den Punkten P_1, P_2, P_3 gehören die durch sie gehenden Geraden g, g_1, g_2, g_3, also nach Axiom 4b die Gerade g_4 und nach Axiom 2b der Punkt P_4 zur Teilgeometrie.

Ist umgekehrt in einer euklidischen Geometrie eine Menge von Punkten gegeben, die den Bedingungen 1), 2), 3) genügt, so betrachte man die Menge $\mathfrak{T}$ dieser Punkte und derjenigen Geraden, die wenigstens einen Punkt der Menge enthalten. Es ist zu zeigen, daß in $\mathfrak{T}$ alle Axiome einer metrisch-euklidischen Geometrie erfüllt sind. Aus 3) folgt zunächst, daß in $\mathfrak{T}$ das Axiom 2b gilt. Die Axiome 1a, 1b, 2a, 4a verlangen, daß jeweils mit einem Punkt eine durch ihn gehende Gerade, die jedenfalls in der euklidischen Geometrie existiert, zu $\mathfrak{T}$ gehört; sie sind erfüllt, da mit einem Punkt alle Geraden durch ihn zu $\mathfrak{T}$ gehören. Sind g_1, g_2, g_3 Geraden aus $\mathfrak{T}$, die auf einer Geraden g aus $\mathfrak{T}$ senkrecht stehen, so gehören nach 3) die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 von g_1, g_2, g_3 und g zu $\mathfrak{T}$, also nach 2) auch der durch $P_1\ P_2\ P_3 = P_4$ definierte Punkt P_4 und schließlich die durch ihn gehende Gerade g_4, für die $g_1\, g_2\, g_3 = g_4$ ist; es gilt also das Axiom 4b in $\mathfrak{T}$. Die Axiome 3a, 3b, 5a, 5b, 7 sind keine Existenzforderungen; sie gelten in $\mathfrak{T}$, da sie in der euklidischen Geometrie gelten. Endlich folgt aus 1), daß in $\mathfrak{T}$ die Axiome 6a und 6b erfüllt sind. $\mathfrak{T}$ ist also eine metrisch-euklidische Teilgeometrie, die zu der gegebenen uklidischen gehört.

Nun gilt die Bedingung 2) in einer Teilgeometrie auch dann, wenn P_1, P_2, P_3 nicht kollinear sind: Wegen des euklidischen Axioms 7 gibt es zu P_1, P_2, P_3 auf der durch P_3 gehenden Parallelen zur Geraden (P_1P_2) einen Punkt P_4, für den $P_1P_2P_3 = P_4$ ist; sind P_3' und P_4' die Fußpunkte der von P_3 und P_4 auf $(P_1\ P_2)$ gefällten Lote, so gehört P_3' nach 3), P_4' nach 2) und also P_4 als Schnittpunkt orthogonaler Geraden durch P_3 und P_4' nach 3) zur Teilgeometrie. Formuliert man die Bedingung 2) allgemeiner ohne Voraussetzung der Kollinearität, so kann man, wenn O ein fester zur Teilgeometrie gehöriger Punkt ist, die Bedingung 3) durch die speziellere ersetzen, daß mit einem Punkt P stets der Schnittpunkt einer Geraden durch O mit der zu ihr orthogonalen durch P zur Teilgeometrie gehören muß. Sind dann nämlich A und B beliebige Punkte der Teilgeometrie und ist S der Schnittpunkt einer Geraden durch A mit der zu ihr orthogonalen durch B, sind ferner B^* und S^* die Punkte, die durch $BAO = B^*$ und $SAO = S^*$ definiert werden, so gehört nach der allgemeineren Bedingung 2) B^*, also S^* als Schnittpunkt einer Geraden durch O mit der zu ihr orthogonalen durch B^*, und also S wegen $AOS^* = S$ zur Teilgeometrie. Es ergibt sich also:

Geometrisches Kriterium, zweite Form. *In einer euklidischen*

Geometrie bildet eine Menge von Punkten, die einen festen Punkt O enthält, dann und nur dann eine zugehörige metrisch-euklidische Teilgeometrie, wenn sie

1′) *mindestens einen von O verschiedenen Punkt enthält,*

2′) *mit den Punkten P_1, P_2, P_3 den Punkt P_4 enthält, für den die Spiegelungsgleichung $P_1P_2P_3 = P_4$ gilt,*

3′) *mit einem Punkt P den Schnittpunkt einer beliebigen Geraden durch O mit der zu ihr orthogonalen durch P enthält.*

§ 2.

Algebraisches Kriterium für metrisch-euklidische Teilgeometrien.

Wir betrachten im folgenden nur solche euklidischen Geometrien, in denen der *rechte Winkel halbierbar* ist, in denen also außer den anfangs genannten Axiomen noch das folgende gilt:

8. Zu zwei orthogonalen Geraden h_1 und h_2 gibt es eine Gerade h, für die die Spiegelungsgleichung $h_1h = hh_2$ gilt.

Man kann dann die Einheitspunkte auf den Achsen als Spiegelpunkte inbezug auf eine Halbierungslinie des rechtwinkligen Koordinatenkreuzes wählen und dadurch die Orthogonalitätskonstante k zu 1 normieren. Das Axiom 8 gilt natürlich stets gleichzeitig in einer euklidischen Geometrie und den zugehörigen metrisch-euklidischen Teilgeometrien.

Es sei nun in einer euklidischen Geometrie eine zugehörige metrisch-euklidische Teilgeometrie gegeben, die den Nullpunkt O des Koordinatensystems enthält. Die Teilgeometrie enthält dann eine Menge von Punkten der x-Achse und wird durch diese Menge eindeutig bestimmt. Sind nämlich $(a, 0)$ und $(b, 0)$ Punkte der x-Achse, die zur Teilgeometrie gehören, so gehört als Spiegelpunkt von $(b, 0)$ inbezug auf die Gerade $y = x$ auch der Punkt $(0, b)$ zur Teilgeometrie; denn wenn $B \equiv (b, 0)$, $B' \equiv (0, b)$ und F der Fußpunkt des von B auf die Gerade $y = x$ gefällten Lotes ist, so ist $FBF = B'$. Es gehört als Schnittpunkt orthogonaler Geraden durch $(a, 0)$ und $(0, b)$ dann auch der Punkt (a, b) zur Teilgeometrie. Und wenn der Punkt (a, b) zur Teilgeometrie gehört, so gehören auch $(a, 0)$ und $(0, b)$, also auch $(b, 0)$ zur Teilgeometrie. Die Teilgeometrie ist also schon durch eine Menge $\mathfrak{M}$ von Abszissen, eine Teilmenge des Koordinatenkörpers K, bestimmt: ein Punkt gehört dann und nur dann zur Teilgeometrie, wenn seine beiden Koordinaten in $\mathfrak{M}$ liegen. Wir können $\mathfrak{M}$ daher als die *Koordinatenmenge* der Teilgeometrie bezeichnen.

Ist $A \equiv (a, 0)$, $B \equiv (b, 0)$, so haben die Punkte U und V, die durch die Spiegelungsgleichungen $AOB = U$ und $OBA = V$ definiert werden, die Abszissen $a + b$ und $a - b$. Sind daher a und b Elemente aus $\mathfrak{M}$, so müssen nach der Bedingung 2′) des geometrischen Kriteriums auch $a + b$ und $a - b$ in $\mathfrak{M}$ liegen.

Nach der Bedingung 3′) des geometrischen Kriteriums gehört mit A auch der Fußpunkt des von A auf die Gerade $y = cx$ gefällten Lotes zur Teilgeometrie. Dieser Fußpunkt hat die Abszisse

$$\frac{1}{1+c^2}\,a, \tag{3}$$

und es muß also mit a auch das Element (3) zu $\mathfrak{M}$ gehören.

So ergibt sich zunächst die Notwendigkeit des Kriteriums:

Algebraisches Kriterium. *In der euklidischen Geometrie mit der Orthogonalitätskonstanten* 1 *über dem Koordinatenkörper K definiert eine Koordinatenmenge* $\mathfrak{M}$ *dann und nur dann eine zugehörige metrisch-euklidische Teilgeometrie, die den Nullpunkt enthält, wenn*

1) *wenigstens ein von Null verschiedenes Element in* $\mathfrak{M}$ *liegt,*
2) *mit* a, b *auch* $a-b$ *in* $\mathfrak{M}$ *liegt,*
3) *mit* a *auch* $\frac{1}{1+c^2}\,a$, *für beliebiges* c *aus* K, *in* $\mathfrak{M}$ *liegt.*

Das Kriterium ist in der Tat auch hinreichend. Denn die additive Eigenschaft 2) garantiert die Bedingung 2′) des geometrischen Kriteriums. Um das Erfülltsein von 3′) nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß mit a und b auch die Koordinaten

$$\frac{a+bc}{1+c^2},\quad \frac{ac+bc^2}{1+c^2} \tag{4}$$

des Fußpunktes des von dem Punkt (a, b) auf die Gerade $y = cx$ $(c \neq 0)$ gefällten Lotes in $\mathfrak{M}$ liegen. Dazu verwenden wir die Identität

$$\frac{2c}{1+c^2} = \frac{(1+c)^2-(1-c)^2}{(1+c)^2+(1-c)^2} \tag{5}$$

und die Tatsache, daß nach 3) mit a auch $\frac{a}{2}$ in $\mathfrak{M}$ liegt. Es ist

$$\frac{a+bc}{1+c^2} = \frac{1}{1+c^2}\,a + \frac{2c}{1+c^2}\,\frac{b}{2} = \frac{1}{1+c^2}\,a + \frac{1}{1+\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2}\,\frac{b}{2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2}\,\frac{b}{2}$$

$$\frac{ac+bc^2}{1+c^2} = \frac{2c}{1+c^2}\,\frac{a}{2} + \frac{c^2}{1+c^2}\,b$$

$$- \frac{1}{1+\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2}\,\frac{a}{2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2}\,\frac{a}{2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2}\,b\,.$$

Aus 2) und 3) folgt, daß die rechts stehenden Ausdrücke in $\mathfrak{M}$ liegen; also gilt dies auch für die links stehenden. Dabei muß zunächst $c \neq \pm 1$ sein. Ist aber $c = \pm 1$, so sind die Koordinaten (4) gleich $\frac{1}{2}(a \pm b)$ oder $\pm\frac{1}{2}(a-b)$, also nach 2) und der Halbierungsregel Elemente von $\mathfrak{M}$, sobald a und b in $\mathfrak{M}$ liegen.

Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von K, die den Bedingungen 1), 2), 3) genügt, ist ein vom Nullmodul verschiedener Modul, der die Elemente

$$\frac{1}{1+c^2} \qquad \text{mit } c \text{ aus } K \tag{6}$$

als Multiplikatoren besitzt. Multiplikatoren sind dann nicht nur die Elemente (6) selbst, sondern alle Elemente des *von den Elementen* (6) *erzeugten Rings* $\mathfrak{E}(K)$, die also endliche Summen bzw. Differenzen von Produkten von je endlich vielen Elementen (6) sind. Im folgenden denken wir uns nun auch den Einheitspunkt der x-Achse $E \equiv (1,0)$ als zur Teilgeometrie gehörig. Dann liegen die 1 und folglich alle Elemente des Multiplikatorenrings $\mathfrak{E}(K)$ in der Koordinatenmenge, und $\mathfrak{E}(K)$ selbst ist die kleinste Menge, die unseren Bedingungen genügt. *In der euklidischen Geometrie mit der Orthogonalitätskonstanten* 1 *über dem Körper K haben die zugehörigen metrisch-euklidischen Teilgeometrien, die O und E enthalten, als Koordinatenmengen die Moduln, die die Elemente von* $\mathfrak{E}(K)$ *als Multiplikatoren enthalten; und die kleinste zugehörige metrisch-euklidische Teilgeometrie, die O und E enthält, besitzt* $\mathfrak{E}(K)$ *selbst als Koordinatenmenge.*

Wenn die Koordinatenmenge $\mathfrak{M}$ bekannt ist, kann die Frage, ob eine Gerade zu der entsprechenden Teilgeometrie gehört, folgendermaßen entschieden werden: Die Geraden durch den Nullpunkt gehören zur Teilgeometrie, und ist

$$u'x + v'y + w' = 0 \qquad \text{mit } w' \neq 0 \tag{7}$$

die Gleichung einer Geraden, die nicht durch den Nullpunkt geht, so kann man die Gleichung durch Multiplikation mit dem Faktor $-\frac{w'}{u'^2+v'^2}$ auf die Normalform

$$ux + vy + w = 0 \qquad \text{mit } u^2 + v^2 + w = 0 \tag{8}$$

bringen. Die in dieser Normalform auftretenden Koeffizienten u und v sind die Koordinaten des Fußpunktes des vom Nullpunkt auf die Gerade gefällten Lotes. *Die Gerade* (7) *gehört also dann und nur dann der Teilgeometrie an, wenn die Koeffizienten u und v der Normalform* (8) *in* $\mathfrak{M}$ *liegen.*

Wenn man die Halbierbarkeit des rechten Winkels voraussetzt, kann man das geometrische Kriterium für metrisch-euklidische Teilgeometrien noch konzentrierter formulieren. Die Bedingung 2) ist in diesem Fall eine Folge von 3).

Indem man die Halbierungslinien des rechten Winkels verwendet, kann man nämlich aus der Bedingung 3) folgern, daß mit zwei Punkten A und B stets auch der Mittelpunkt der Strecke AB und der Spiegelpunkt A_B des Punktes A inbezug auf den Punkt B zur Teilgeometrie gehören. (s. Fig. 1 und 2; die Zahlen geben die Reihenfolge an, in der man

sich bei den Punkten von ihrer Zugehörigkeit zur Teilgeometrie überzeugen kann). Sind dann P_1, P_2, P_3 Punkte einer Geraden, die zur Teilgeometrie gehören, so muß auch der durch die Gleichung $P_1\,P_2\,P_3 = P_4$

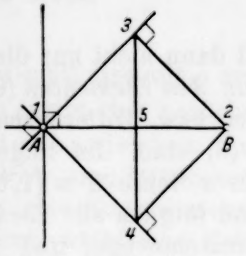

Fig. 1.

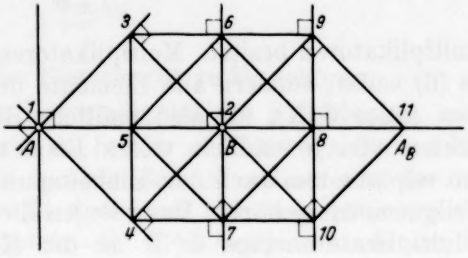

Fig. 2.

definierte Punkt P_4 zur Teilgeometrie gehören. Denn wenn M der Mittelpunkt der Strecke $P_1\,P_3$ ist, so ist P_4 der Spiegelpunkt von P_2 inbezug auf M; M und P_4 gehören dann nach dem Gesagten zur Teilgeometrie.

Nennt man X einen Punkt des Kreises über dem Durchmesser AB, wenn die Geraden (AX) und (XB) zueinander orthogonal sind, so kann man das geometrische Kriterium so aussprechen:

Spezielles geometrisches Kriterium. *In einer euklidischen Geometrie, in der der rechte Winkel halbierbar ist, bildet eine Menge von Punkten dann und nur dann eine zugehörige metrisch-euklidische Teilgeometrie, wenn sie mindestens zwei Punkte und jeweils mit zwei Punkten A und B alle Punkte des Kreises über dem Durchmesser AB enthält.*

Geht man von den Punkten O und E aus und nimmt man jeweils beim $(n+1)$-ten Schritt zu je zwei beim n-ten Schritt vorhandenen Punkten alle Punkte des Kreises über diesen beiden als Durchmesser hinzu ($n = 0, 1, 2, \ldots$), so bildet die durch diesen unendlichen Prozeß definierte Punktmenge die kleinste O und E enthaltende zugehörige Teilgeometrie, die wir oben algebraisch charakterisiert haben.

§ 3.

Beispiele metrisch-euklidischer Teilgeometrien.

Wir betrachten zunächst über dem Körper P der rationalen Zahlen die euklidische Geometrie mit der Orthogonalitätskonstanten 1.

Der Ring $\mathfrak{C}(\mathsf{P})$ besteht aus den ganzen und denjenigen gebrochenen rationalen Zahlen, deren Nenner in der gekürzten Form nur Primfaktoren $p = 2,\ 4l+1$ enthält. Bezeichnen wir nämlich den Ring dieser rationalen Zahlen zunächst mit $\mathfrak{R}$, so gilt:

a) $\mathfrak{C}(\mathsf{P}) \subset \mathfrak{R}$. Wir zeigen, daß die erzeugenden Elemente von $\mathfrak{C}(\mathsf{P})$ in $\mathfrak{R}$ liegen. Für $c = 0$ liegt $\frac{1}{1+c^2}$ in $\mathfrak{R}$. Ist $c \neq 0$ und $c = \frac{m}{n}$ mit

positiven ganzen m, n und $(m, n) = 1$, so ist $\frac{1}{1+c^2} = \frac{n^2}{n^2+m^2}$ und $\frac{n^2}{n^2+m^2}$ die gekürzte Form. Jedes n^2+m^2 mit $(m, n) = 1$ besitzt bekanntlich nur Primfaktoren $p = 2, 4l+1$. Denn wenn p/n^2+m^2, so $(p, m) = 1$. Aus $n^2+m^2 \equiv 0\,(p)$ folgt, da $mx \equiv n\,(p)$ wegen $(p, m) = 1$ auflösbar, $m^2x^2+m^2 \equiv m^2(x^2+1) \equiv 0\,(p)$, und daraus $x^2 \equiv -1\,(p)$, also -1 quadratischer Rest für p.

b) $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{C}(\mathbf{P})$. $\mathfrak{R}$ ist der von den Zahlen $\frac{1}{p}$ mit $p = 2, 4l+1$ erzeugte Ring, und die erzeugenden Elemente von $\mathfrak{R}$ liegen in $\mathfrak{C}(\mathbf{P})$. Denn p ist darstellbar als $p = m^2+n^2$ mit positiven ganzen m, n und $(m, n) = 1$. Es ist auch $(m^2, n^2) = 1$; daher gibt es eine Darstellung $1 = u\,m^2+v\,n^2$ mit ganzen u, v, und es ist

$$\frac{1}{p} = \frac{u\,m^2+v\,n^2}{m^2+n^2} = u\,\frac{m^2}{m^2+n^2}+v\,\frac{n^2}{m^2+n^2} = u\,\frac{1}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}+v\,\frac{1}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}.$$

Die rechte Seite liegt in $\mathfrak{C}(\mathbf{P})$, also liegt auch $\frac{1}{p}$ in $\mathfrak{C}(\mathbf{P})$.

Die rationalen Zahlen, deren Nenner in der gekürzten Form gleich 1 *ist oder nur Primfaktoren* $p = 2, 4l+1$ *enthält, definieren also in der rationalen euklidischen Geometrie mit der Orthogonalitätskonstanten* 1 *die kleinste zugehörige metrisch-euklidische Teilgeometrie, die O und E enthält.*

Es ist leicht, alle Moduln aus rationalen Zahlen zu bestimmen, die unseren Bedingungen genügen. Dazu betrachten wir zunächst einen beliebigen Modul $\mathfrak{M}$ aus rationalen Zahlen, der die 1 enthält. Die Zahlen aus $\mathfrak{M}$ seien in gekürzter Form und die (als positiv angenommenen) Nenner der gebrochenen Elemente in ihrer Primzahlpotenzzerlegung geschrieben. Ist $p_1, p_2, \ldots$ die Folge der Primzahlen und p_i eine Primzahl, von der eine Potenz im Nenner eines Modulelements auftritt, so tritt auch jede kleinere, aber nicht notwendig jede höhere Potenz von p_i im Nenner eines Modulelements auf. Zu p_i kann es eine *Exponentengrenze* $N_i = 2, 3, \ldots$ geben, sodaß $p_i^{N_i}$ im Nenner keines Modulelements auftritt, während alle $p_i^{n_i}$ mit $0 < n_i < N_i$ im Nenner von Modulelementen auftreten. Anderenfalls treten unbeschränkt hohe und dann alle Potenzen von p_i in Nennern von Modulelementen auf; wir sagen dann, daß N_i gleich Unendlich sei. Ist p_i eine Primzahl, von der keine Potenz im Nenner eines Modulelements auftritt, so setzen wir N_i gleich 1.

Wir behaupten zunächst: Ordnet man irgendwie jeder Primzahl p_i eine natürliche Zahl 1, 2, 3, ... oder Unendlich als Exponentengrenze N_i zu, so gibt es einen zugehörigen Modul von rationalen Zahlen, der die 1 enthält: Die Gesamtheit $\mathfrak{M}^*$ der ganzen Zahlen und aller gebrochenen Zahlen der Form

$$(9) \qquad \frac{u}{p_{i_1}^{n_{i_1}} p_{i_2}^{n_{i_2}} \cdots p_{i_r}^{n_{i_r}}} \text{ mit } 0 < n_{i_\varrho} < N_{i_\varrho},\ u \text{ ganz},\ (u, p_{i_\varrho}) = 1,\ \varrho = 1, 2, \ldots r,$$

wobei $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r}$ je beliebig viele verschiedene Primzahlen sind, deren Exponentengrenze ungleich 1 ist, bildet einen solchen Modul. Durch Addition (bzw. Subtraktion) von zwei Zahlen aus $\mathfrak{M}^*$ entsteht wieder eine Zahl aus $\mathfrak{M}^*$. Das ist klar, wenn die Summe ganz ist. Wenn die Summe eine gebrochene Zahl ist, so tritt von jeder Primzahl, von der eine Potenz in der Primzahlpotenzzerlegung des gekürzten Nenners der Summe vorkommt, die gleiche oder eine höhere Potenz in der Primzahlpotenzzerlegung des Nenners wenigstens eines der beiden Summanden auf.

$\mathfrak{M}^*$ kann man auch als den von den Zahlen

$$1, \quad \frac{1}{p_i^{n_i}} \text{ mit } 0 < n_i < N_i \tag{10}$$

erzeugten Modul beschreiben. Da die Zahlen (10) unter den Elementen von $\mathfrak{M}^*$ vorkommen, ist der von ihnen erzeugte Modul in $\mathfrak{M}^*$ enthalten. Umgekehrt gehören aber auch die ganzen Zahlen und jede Zahl (9) dem von den Zahlen (10) erzeugten Modul an. Denn wegen

$$\left(p_{i_2}^{n_{i_2}} p_{i_3}^{n_{i_3}} \ldots p_{i_r}^{n_{i_r}},\ p_{i_1}^{n_{i_1}} p_{i_3}^{n_{i_3}} \ldots p_{i_r}^{n_{i_r}}, \ldots, p_{i_1}^{n_{i_1}} p_{i_2}^{n_{i_2}} \ldots p_{i_{r-1}}^{n_{i_{r-1}}}\right) = 1$$

ist

$$1 = u_1 p_{i_2}^{n_{i_2}} p_{i_3}^{n_{i_3}} \ldots p_{i_r}^{n_{i_r}} + u_2 p_{i_1}^{n_{i_1}} p_{i_3}^{n_{i_3}} \ldots p_{i_r}^{n_{i_r}} + \cdots + u_r p_{i_1}^{n_{i_1}} p_{i_2}^{n_{i_2}} \ldots p_{i_{r-1}}^{n_{i_{r-1}}}$$

mit ganzen Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_r$ darstellbar; daher liegt

$$\frac{1}{p_{i_1}^{n_{i_1}} p_{i_2}^{n_{i_2}} \ldots p_{i_r}^{n_{i_r}}} = u_1 \frac{1}{p_{i_1}^{n_{i_1}}} + u_2 \frac{1}{p_{i_2}^{n_{i_2}}} + \cdots + u_r \frac{1}{p_{i_r}^{n_{i_r}}}$$

und also auch (9) in dem von den Elementen (10) erzeugten Modul.

Es sei nun $\mathfrak{M}$ der ursprünglich gegebene Modul und in der anfangs geschilderten Weise zu jeder Primzahl p_i die zugehörige Exponentengrenze N_i bestimmt. Es ist dann der durch die gleiche Zuordnung $p_i \to N_i$ bestimmte Modul $\mathfrak{M}^*$ in $\mathfrak{M}$ enthalten. $\mathfrak{M}$ enthält nämlich die Zahlen (10): Die 1 liegt nach Voraussetzung in $\mathfrak{M}$. Ist $N_i \neq 1$ und $0 < n_i < N_i$, so gibt es in $\mathfrak{M}$ ein Element, welches die Eigenschaft hat, daß $p_i^{n_i}$ in der Primzahlpotenzzerlegung seines gekürzten Nenners auftritt. Ist u der Zähler des betreffenden Elements, so gehört auch $\frac{u}{p_i^{n_i}}$ zu $\mathfrak{M}$; wegen $(u, p_i^{n_i}) = 1$ ist $1 = u_1 u + u_2 p_i^{n_i}$ mit ganzen u_1, u_2 darstellbar, und daher auch

$$\frac{1}{p_i^{n_i}} = u_1 \frac{u}{p_i^{n_i}} + u_2$$

Element von $\mathfrak{M}$. Mit den Zahlen (10) liegt der von ihnen erzeugte Modul und also $\mathfrak{M}^*$ in $\mathfrak{M}$. Daraus folgt aber, daß $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}^*$ identisch ist;

denn zu $\mathfrak{M}^*$ gehören bereits alle Zahlen, deren gekürzte Nenner die durch die Exponentengrenzen zugelassenen Primzahlpotenzen enthalten.

Es gilt daher: *Jeder Modul von rationalen Zahlen, der die* 1 *enthält, ist von folgender Struktur: zu jeder Primzahl* p_i *gehört eine Exponentengrenze* N_i, *die eine natürliche Zahl* 1, 2, 3, ... *oder Unendlich ist und der Modul besteht aus den ganzen und denjenigen gebrochenen rationalen Zahlen, deren gekürzte Nenner in ihrer Primzahlpotenzzerlegung nur Primzahlpotenzen* $p_i^{n_i}$ *mit* $0 < n_i < N_i$ *enthalten; und zu jeder Wahl der Exponentengrenzen existiert ein solcher Modul.*

Multiplikatoren in $\mathfrak{M}$ sind die ganzen und diejenigen gebrochenen rationalen Zahlen, deren gekürzte Nenner nur aus Potenzen solcher Primzahlen p_i zusammengesetzt sind, deren Exponentengrenze N_i Unendlich ist; $\mathfrak{M}$ ist also dann und nur dann ein Ring, wenn die Exponentengrenzen für alle Primzahlen nur die Werte 1 und Unendlich haben. Damit $\mathfrak{M}$ die Zahlen (6) als Multiplikatoren enthält, müssen die Exponentengrenzen für die Primzahlen $p = 2, 4l + 1$ Unendlich sein.

Alle Moduln, die in der rationalen euklidischen Geometrie mit der Orthogonalitätskonstanten 1 *die zugehörigen O und E enthaltenden metrisch-euklidischen Teilgeometrien definieren, erhält man also, indem man den Primzahlen* $p = 2, 4l+1$ *die Exponentengrenze Unendlich und jeder Primzahl* $p = 4l+3$ *in beliebiger Weise als Exponentengrenze eine natürliche Zahl oder den Wert Unendlich zuordnet.* —

Ist K ein geordneter Körper, in dem jedes positive Element Quadrat ist, so ist jedes a mit $0 < a \leqq 1$ in der Form (6) darstellbar. Hieraus folgt $\mathfrak{C}(K) = K$, wenn K außerdem archimedisch geordnet, beispielsweise der Körper der reellen Zahlen ist. Zu den euklidischen Geometrien über diesen Körpern gehören keine echten metrisch-euklidischen Teilgeometrien.

Dagegen gehören zu Geometrien über nichtarchimedisch geordneten Körpern stets echte metrisch-euklidische Teilgeometrien, da die Elemente (6) stets positiv und höchstens gleich 1 sind und $\mathfrak{C}(K)$ also keine Elemente enthält, die unendlich groß gegen 1 sind. Die Koordinatenmenge von Dehns semieuklidischer Geometrie ist in dem Hilbertschen Körper $\Omega(t)$ die Menge derjenigen Elemente a, zu denen es bei der von Hilbert angegebenen nichtarchimedischen Anordnung des Körpers eine natürliche Zahl m gibt (die von a abhängen darf), sodaß $-m < a < +m$ ist. Es ist klar, daß dieser Ring unserem Kriterium genügt. Allgemeiner ist bei jedem festen $l = 0, 1, 2, \ldots$ die Gesamtheit der Elemente a aus $\Omega(t)$, zu denen eine natürliche Zahl m mit $-mt^l \leqq a \leqq mt^l$ existiert, ein Modul, der unserem Kriterium genügt. Der Ring $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ ist ein echter Teilring des Dehnschen Koordinatenrings, den wir in der zweiten Mitteilung charakterisieren werden. An metrisch-euklidischen Geometrien, die zu der euklidischen Geometrie über dem Körper $\Omega(t)$ gehören, gibt es also nicht nur solche, die die Dehnsche umfassen, sondern auch echte Teilgeometrien der Dehnschen.

§ 4.

Transformation einer metrisch-euklidischen Teilgeometrie in sich.

In einer euklidischen Geometrie werden die zugehörigen metrisch-euklidischen Teilgeometrien, die einen Punkt O enthalten, von Punktmengen gebildet, die durch die Spiegelungen an den Geraden durch O, also auch durch die Produkte von je zwei solchen Spiegelungen, d. h. durch die Drehungen um O, und ferner durch die Schiebungen um Strecken, deren Endpunkte der Menge angehören, in sich übergeführt werden. Die Abgeschlossenheit gegen die Schiebungen ist gleichbedeutend mit der Bedingung 2′) des geometrischen Kriteriums, und die Abgeschlossenheit gegen die Spiegelungen bzw. Drehungen folgt aus den Bedingungen 2′) und 3′) zusammen. Eine metrisch-euklidische Teilgeometrie ist jedoch im allgemeinen durch diese beiden Eigenschaften noch nicht charakterisiert. *Notwendig und hinreichend dafür, daß in einer euklidischen Geometrie eine Menge von Punkten, die einen Punkt O enthält, eine zugehörige metrisch-euklidische Teilgeometrie bildet, ist, daß sie wenigstens einen von O verschiedenen Punkt enthält und durch die Halbdrehungen*[7]) *um O und die Schiebungen um Strecken, deren Endpunkte der Menge angehören, in sich abgebildet wird.* Die Abgeschlossenheit gegen die Halbdrehungen ist dabei gleichwertig mit der Abgeschlossenheit gegen die Drehungen um O und der zusätzlichen Bedingung, daß mit zwei Punkten eines Kreises um O (d. h. mit zwei Punkten, die durch eine Drehung um O auseinander hervorgehen) auch ihr Mittelpunkt zu der Menge gehört. Erst hieraus kann man schließen, daß die Bedingung 3′) des geometrischen Kriteriums erfüllt ist. (Dieser Absatz ist wie § 1 von Axiom 8 unabhängig.)

Betrachten wir nun Punktmengen mit den genannten Eigenschaften für den Fall der Orthogonalitätskonstanten 1 vom algebraischen Standpunkt.

Die Formeln für die Drehungen um O erhält man, indem man die Spiegelung $x' = x,\ y' = -y$ mit den Formeln (2) für die Spiegelungen an den Geraden durch O zusammensetzt; sie lauten daher:

$$(11)\qquad x' = \frac{1-c^2}{1+c^2}\,x - \frac{2c}{1+c^2}\,y,\quad y' = \frac{2c}{1+c^2}\,x + \frac{1-c^2}{1+c^2}\,y \text{ mit } c \text{ aus } K,$$
$$\text{und } x' = -x,\ y' = -y.$$

Zu jeder von $x' = x,\ y' = y$ und $x' = -x,\ y' = -y$ verschiedenen Drehung gibt es eine Halbdrehung $x'' = \frac{1}{2}(x+x'),\ y'' = \frac{1}{2}(y+y')$. Die Formeln für die Halbdrehungen um O lauten daher:

$$(12)\quad x'' = \frac{1}{1+c^2}\,x - \frac{c}{1+c^2}\,y,\quad y'' = \frac{c}{1+c^2}\,x + \frac{1}{1+c^2}\,y \text{ mit } c \neq 0 \text{ aus } K.$$

Die Formeln für die Parallelverschiebung sind:

$$(13)\qquad x''' = x \pm x_0,\quad y''' = y \pm y_0.$$

[7]) Arnold Schmidt a. a. O. S. 615.

Die Forderung, daß eine O enthaltende Punktmenge gegen die Halbdrehungen (12) und für jeden Punkt (x_0, y_0) der Menge gegen die Parallelverschiebungen (13) abgeschlossen sein soll, hat zur Folge, daß ihr eine Koordinatenmenge in dem früheren Sinne entspricht, daß ein Punkt (a, b) dann und nur dann zu der Punktmenge gehört, wenn a und b zur Koordinatenmenge gehören, und führt auf das algebraische Kriterium des § 2. Da jedes $\frac{2c}{1+c^2}$ mit $c \neq -1$ auf Grund der Identität (5) als als $\frac{1-c'^2}{1+c'^2}$ mit $c' = \frac{1-c}{1+c}$ darstellbar ist, ist eine Koordinatenmenge gegen die Operationen (11) und (13) dann und nur dann abgeschlossen, wenn sie ein Modul ist, der die Elemente

$$\frac{1-c^2}{1+c^2} \quad \text{mit } c \text{ aus } K, \ -1 \tag{14}$$

und also die Elemente des von ihnen erzeugten Rings $\mathfrak{C}'(K)$ als Multiplikatoren besitzt. Die Elemente (14) nennen wir die *pythagoreischen Elemente aus K*. Sie stellen alle x aus K dar, zu denen in K ein y existiert, so daß $x^2+y^2=1$ ist, oder etwas anders formuliert, alle x aus K, für die $1-x^2$ in K Quadrat ist. Denn für ein solches $x \neq -1$ ist auch der durch $(1+x)^2$ dividierte Ausdruck, also $\frac{1-x}{1+x}$ ein c^2 mit c aus K, und daher x von der Form (14).

Der Ring $\mathfrak{C}'(K)$ ist stets in dem Ring $\mathfrak{C}(K)$ enthalten, da die Erzeugenden von $\mathfrak{C}'(K)$ stets in $\mathfrak{C}(K)$ enthalten sind; und wie die Identität

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-c^2}{1+c^2}\right) = \frac{1}{1+c^2} \tag{15}$$

lehrt, erhält man den Ring $\mathfrak{C}(K)$ jedenfalls, wenn man zu den pythagoreischen Elementen die Zahl $\frac{1}{2}$ als erzeugendes Element hinzunimmt. Alle rationalen pythagoreischen Zahlen haben ungeraden Nenner. Der von ihnen erzeugte Ring $\mathfrak{C}'(\mathbf{P})$ besteht also aus den ganzen und denjenigen gebrochenen rationalen Zahlen, deren Nenner in gekürzter Form nur Primfaktoren der Gestalt $4l+1$ enthält. *Der von den rationalen pythagoreischen Zahlen erzeugte Ring definiert in der rationalen euklidischen Geometrie mit der Orthogonalitätskonstanten* 1 *eine Menge von Punkten und Geraden, die gegen die Drehungen um O und gegen die Schiebungen um Strecken, deren Endpunkte zur Menge gehören, abgeschlossen ist; sie wird eine metrisch-euklidische Teilgeometrie erst dann, wenn die Zahl* $\frac{1}{2}$ *als erzeugendes Element des Ringes hinzugenommen wird.*

§ 5.

Konstruierbarkeit mit Lineal und Rechtwinkelmaß.

Unsere Überlegungen stehen in Zusammenhang mit der Frage, welche geometrischen Konstruktionen man in einer euklidischen Ebene mit Lineal und Rechtwinkelmaß ausführen kann, wenn man das Lineal aus-

schließlich zuläßt, um zu zwei gegebenen Punkten die Verbindungsgerade zu ziehen. Wir verwenden die drei folgenden *Grundkonstruktionen:*

1) Die Verbindungsgerade von zwei gegebenen voneinander verschiedenen Punkten zu ziehen.

2) Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Senkrechte zu ziehen.

3) Den Schnittpunkt von zwei gegebenen orthogonalen Geraden zu konstruieren.

Wir beschränken uns also, was das Schneiden von Geraden angeht, auf das Schneiden orthogonaler Geraden. Das *Lineal* sei definiert als ein Instrument, welches gestattet, die Grundkonstruktion 1) auszuführen, und das *Rechtwinkelmaß* als ein Instrument, welches gestattet, die Grundkonstruktionen 2) und 3) auszuführen[8]).

Die Grundkonstruktionen entsprechen den Axiomen 1a, 1b, 2b. Wir ordnen nun auch den Existenzaxiomen 4a, 4b, 8 Konstruktionsaufgaben zu:

4) Zu gegebenen Geraden g_1, g_2, g_3, die sich in einem gegebenen Punkt P schneiden, die Gerade g_4 zu konstruieren, für die $g_1\, g_2\, g_3 = g_4$ ist.

5) Zu gegebenen Geraden g_1, g_2, g_3, die auf einer gegebenen Geraden g senkrecht stehen, die Gerade g_4 zu konstruieren, für die $g_1 g_2 g_3 = g_4$ ist.

6) Zu zwei gegebenen orthogonalen Geraden h_1 und h_2 eine Gerade h zu konstruieren, für die $h_1 h = h h_2$ ist.

und behaupten, daß diese Aufgaben durch iterierte Anwendung der Grundkonstruktionen gelöst werden können, wenn drei Eckpunkte eines Quadrats, die wir E, O, E' nennen, gegeben sind.

Bei der Aufgabe 4) nehmen wir zunächst an, daß $g_1 \neq g_3$ ist. Ist P_2 ein von P verschiedener Punkt auf g_2, so bestimme man die Fußpunkte P_1 und P_3 der von P_2 auf g_1 und g_3 gefällten Lote; g_4 ist dann das von P auf die Verbindungsgerade $(P_1 P_3)$ gefällte Lot. Ist $g_1 = g_3$, so errichte man auf g_1 die Senkrechte g_5 in P. Ist dann $g_2 = g_5$, so ist auch $g_4 = g_5$. Ist $g_2 \neq g_5$, so konstruiere man zu g_1, g_2, g_5 in der geschilderten Weise (es ist $g_1 \neq g_5$) die Gerade g_6, für die $g_1\, g_2\, g_5 = g_6$ gilt. Die auf g_6 in P errichtete Senkrechte ist dann die gesuchte Gerade g_4.

Was die Aufgabe 6) anlangt, so kann man zunächst eine Halbierungslinie des durch E, O, E' gegebenen rechten Winkels konstruieren, indem man durch O die Senkrechte zu $(E E')$ zieht. Setzt man diese Halbierungslinie gleich g_1 und $(OE) = g_2$, so kann man zu jedem rechten Winkel mit dem Scheitel O eine Halbierungslinie konstruieren, indem man eine

[8]) Statt der Grundkonstruktionen 2) und 3) kann man auch die beiden folgenden verwenden: 2') Auf einer gegebenen Geraden in einem gegebenen auf ihr liegenden Punkt die Senkrechte zu errichten. 3') Den Fußpunkt des von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene nicht durch ihn gehende Gerade zu fällenden Lotes zu konstruieren. (Einen Punkt in eine Gerade senkrecht zu projizieren.)

Schenkelgerade gleich g_3 setzt und die Konstruktion 4) anwendet. Die Halbierung rechter Winkel mit beliebigem Scheitel läßt sich auf die Halbierung der rechten Winkel mit dem Scheitel O zurückführen, da man zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mit Hilfe des Rechtwinkelmaßes die Parallele ziehen kann.

Bei der Aufgabe 5) seien P_1, P_2, P_3, P_4 die Schnittpunkte der Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 mit g. Zu P_1, P_2, P_3 erhält man (vgl. § 2) P_4 durch Anwendung der beiden Hilfskonstruktionen:

a) Den Mittelpunkt einer gegebenen Strecke zu konstruieren.

b) Den Spiegelpunkt eines gegebenen Punktes inbezug auf einen anderen gegebenen Punkt zu konstruieren,

die, wie man sich an Hand der Figuren 1 und 2 überzeugt, mit Hilfe der Konstruktionen 1), 2), 3), 6) ausführbar sind. g_4 ist dann die auf g in P_4 errichtete Senkrechte.

Von den Existenzaxiomen des Axiomensystems haben wir den Axiomen 2a, 6a, 6b keine Konstruktionsaufgaben zugeordnet. 2a ist von den übrigen Axiomen abhängig, und die Axiome 6a und 6b, die die notwendige Reichhaltigkeit an axiomatisch geforderten Punkten und Geraden sichern, ordnen nicht gegebenen Elementen neue Elemente in bestimmter Weise zu. In der Tat lassen sich unter unseren Voraussetzungen zu gegebenen Elementen in mannigfacher Weise mit unseren Instrumenten solche konstruieren, die diesen Axiomen genügen.

Wir können daher den Satz aussprechen: *In einer metrisch-euklidischen Geometrie, in der der rechte Winkel halbierbar ist, kann man alle Konstruktionsaufgaben, die den vorausgesetzten Existenzaxiomen entsprechen, in dem angegebenen Sinne mit Lineal und Rechtwinkelmaß lösen, wenn drei Eckpunkte eines Quadrats gegeben sind.*

Wir fragen nun, welche Punkte und Geraden man in einer euklidischen Geometrie, deren Koordinatenkörper von der Charakteristik Null ist, z. B. in der gewöhnlichen reellen euklidischen Geometrie, von den Punkten E, O, E' ausgehend durch endliche Ketten der drei Grundkonstruktionen gewinnen kann. Es möge ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit O als Nullpunkt eingeführt werden, in dem E und E' die Einheitspunkte auf den Achsen sind. Die Menge der konstruierbaren Punkte und Geraden ist dann eine metrisch-euklidische Teilgeometrie der rationalen Geometrie, und zwar eine zugehörige, da die Punkte des ganzzahligen Gitters und also alle rationalen Geraden durch O konstruierbar sind, und unter den zugehörigen natürlich die kleinste E, O, E' enthaltende, da diese bereits gegen die Anwendung der Grundkonstruktionen abgeschlossen ist, also die Geometrie über dem Ring $\mathfrak{C}(\mathsf{P})$. Wir erhalten daher das

Konstruierbarkeitskriterium. *Sind in einer euklidischen Geometrie, deren Koordinatenkörper von der Charakteristik Null ist, drei Eckpunkte eines Quadrats gegeben und wählt man sie als Null- und Einheitspunkte des Koordinatensystems, so kann man von ihnen*

ausgehend mit Lineal und Rechtwinkelmaß bei der angegebenen Verwendungsweise die Punkte, deren Koordinaten dem Ring $\mathfrak{C}(\mathbf{P})$ angehören, die rationalen Geraden durch den Nullpunkt und die, die in der Normalform (8) Koeffizienten u und v aus $\mathfrak{C}(\mathbf{P})$ haben, und nur diese Elemente konstruieren.

Beispielsweise ist der Punkt $(\frac{1}{3}, 0)$ nicht konstruierbar, und von den durch ihn gehenden rationalen Geraden sind außer der Geraden $y = 0$ nur diejenigen konstruierbar, deren Richtungskoeffizient in der gekürzten Form einen durch 3 teilbaren Zähler hat.

(Eingegangen am 3. April 1947.)

Geometrien mit euklidischer Metrik, in denen es zu jeder Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mehrere Nichtschneidende gibt. II.

Von

F. Bachmann in Göttingen.

Die Frage nach metrisch-euklidischen Geometrien, in denen es zu jeder Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mehrere Nichtschneidende gibt, soll wie in der ersten Mitteilung[1]) vom Standpunkt der Begründung der Geometrie aus den elementaren Spiegelungseigenschaften untersucht werden, jedoch in dieser Mitteilung unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß jeder Winkel halbierbar sei.

In der ersten Mitteilung haben wir gesehen, daß die Abgrenzung von metrisch-euklidischen Teilgeometrien in der euklidischen Geometrie über einem Koordinatenkörper K auf den von den Elementen

$$(*) \qquad \frac{1}{1+c^2} \qquad \text{mit } c \text{ aus } K$$

erzeugten Ring $\mathfrak{E}(K)$ führt, den Koordinatenbereich der kleinsten zugehörigen Teilgeometrie.

Wir beweisen zunächst einen Satz über einen beliebigen reellen Körper K[2]): Der von den allgemeineren Elementen

$$(*_*) \qquad \frac{1}{1+\Sigma c_\nu^2} \qquad \text{mit } c_\nu \text{ aus } K$$

(Σ eine endliche Summe) erzeugte Ring ist der Ring derjenigen Elemente aus K, für die es ganze rationale Zahlen gibt, zwischen denen sie bei jeder Anordnung des Körpers liegen. Der Beweis beruht darauf, daß die Elemente aus K, die bei keiner Anordnung von K negativ sind, die Quadratsummen sind[3]).

Der Koordinatenkörper einer euklidischen Geometrie mit Winkelhalbierbarkeit muß ein reeller Körper sein, in dem jede Quadratsumme

---

[1]) diese Zeitschrift **51**, S. 752–768, 1949. Die dritte Mitteilung ist in Math. Nachrichten Berlin **1**, S. 258—276, 1948 erschienen.

[2]) s. die Arbeiten von E. Artin und O. Schreier in den Abh. a. d. Math. Sem. der Hamburgischen Universität **5**, 1927, und die Darstellung bei B. L. v. d. Waerden, Moderne Algebra I. 2. Aufl. Berlin 1937, Kap. IX.

[3]) E. Artin, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Abh. a. d. Math. Sem. der Hamburgischen Universität **5**, S. 100—115, 1927.

als Quadrat darstellbar ist. In diesen Körpern fallen die Erzeugenden (*) und (**) zusammen, und indem wir den genannten Satz als Kriterium verwenden, untersuchen wir den von den Elementen (*) erzeugten Ring in den beiden Körpern Ω und $\Omega(t)$ aus HILBERTS „Grundlagen der Geometrie“[4]. Im ersten Fall ergibt sich, daß der Ring $\mathfrak{C}(\Omega)$ gleich Ω ist[5], im zweiten Fall beweisen wir mit Hilfe des Satzes, aus dem ARTIN die Darstellbarkeit definiter rationaler Funktionen als Quadratsummen hergeleitet hat[3], daß der Ring $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ die Teilmenge der samt ihren Konjugierten für alle reellen Werte von t beschränkten Funktionen ist. Die Geometrie über diesem Koordinatenbereich ist eine echte Teilgeometrie der DEHNschen semieuklidischen Geometrie[6] und von Interesse für die Frage nach der Rolle der Anordnungsaxiome.

Die Kenntnis des von den Elementen (*) erzeugten Ringes in den Körpern Ω und $\Omega(t)$ ermöglicht es, Kriterien dafür auszusprechen, daß man in einer euklidischen Ebene die geometrische Konstruktion eines Punktes mit Lineal, Rechtwinkelmaß und Eichmaß ausführen kann, wenn man das Lineal wiederum ausschließlich zum Ziehen der Verbindungsgeraden gegebener Punkte und nicht zum Schneiden von Geraden verwendet[7]. Es sind dies Konstruktionsmittel, die den in dieser Mitteilung vorausgesetzten Axiomen entsprechen.

§ 1.

Ein Satz über reelle Körper.

K sei ein reeller Körper. Wir betrachten in ihm die Elemente

$$\frac{1}{1+\Sigma c_\nu^2} \quad \text{mit } c_\nu \text{ aus } K \tag{1}$$

(Σ bezeichne stets eine endliche Summe) und den *von den Elementen* (1) *erzeugten Modul* $\mathfrak{C}^*(K)$, dessen Elemente also endliche Summen von Elementen (1) und ihren Entgegengesetzten sind; offensichtlich ist das Produkt von zwei Erzeugenden (1) wieder von dieser Form und daher $\mathfrak{C}^*(K)$ ein Ring.

In $\mathfrak{C}^*(K)$ liegen offenbar alle Elemente

$$\frac{1-\Sigma c_\nu^2}{1+\Sigma c_\nu^2} \quad \text{mit } c_\nu \text{ aus } K, \; -1, \tag{2}$$

---

[4]) 7. Aufl. Leipzig-Berlin 1930, § 9, § 12.

[5]) Den ersten Beweis dieses Satzes, aus dem der hier dargestellte hervorgegangen ist, verdanke ich Herrn HASSE. Ein anderer Beweis ist in meiner Arbeit: Über die Konstruierbarkeit mit Lineal, Rechtwinkelmaß und Eichmaß. Math.-phys. Semesterberichte **1**, Heft 1/2, Göttingen 1949, enthalten.

[6]) M. DEHN, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Math. Ann. **53**, S. 404–439, 1900.

[7]) vgl. die in Anm. [5]) genannte Arbeit.

die wir als die *verallgemeinerten pythagoreischen Elemente aus* K bezeichnen wollen. Die Bedingung

$$(3) \qquad x = \frac{1 - \Sigma c_\nu^2}{1 + \Sigma c_\nu^2} \text{ mit } c_\nu \text{ aus } K \text{ oder } x = -1$$

ist gleichwertig mit

$$(4) \qquad \frac{1-x}{1+x} = \Sigma c_\nu^2 \text{ mit } c_\nu \text{ aus } K \text{ oder } x = -1,$$

und multipliziert man diese Bedingung mit $(1+x)^2$, so erkennt man, daß man die verallgemeinerten pythagoreischen Elemente aus K auch definieren kann als die x aus K, für die $1 - x^2$ in K als Quadratsumme darstellbar ist:

$$(5) \qquad 1 - x^2 = \Sigma d_\nu^2 \qquad \text{mit } d_\nu \text{ aus } K;$$

denn auch umgekehrt erhält man, indem man (5) durch $(1+x)^2$ dividiert, die Darstellung (4). (3), (4), (5) sind also äquivalente Charakterisierungen der verallgemeinerten pythagoreischen Elemente. Jede Erzeugende (1) und ihr Entgegengesetztes ist auch ein verallgemeinertes pythagoreisches Element, wie man aus (5) erkennt, und daher ist jedes Element aus $\mathfrak{C}^*(K)$ als endliche Summe von verallgemeinerten pythagoreischen Elementen darstellbar. Es ist, wie man ebenfalls aus (5) schließen kann, auch das Produkt von zwei verallgemeinerten pythagoreischen Elementen ein verallgemeinertes pythagoreisches Element.

Wir fragen uns nun, wie sich die Elemente von $\mathfrak{C}^*(K)$ bei den möglichen Anordnungen des Körpers K verhalten. Wir denken uns dabei den Modul $\mathfrak{C}^*(K)$ von den verallgemeinerten pythagoreischen Elementen erzeugt.

Offenbar gilt bei jeder Anordnung von K

$$(6) \qquad -1 \leqq \frac{1 - \Sigma c_\nu^2}{1 + \Sigma c_\nu^2} \leqq 1$$

für jedes verallgemeinerte pythagoreische Element, und daher gibt es zu jedem Element a aus $\mathfrak{C}^*(K)$ eine natürliche Zahl $m = 1, 2, 3, \ldots$, so daß bei jeder Anordnung von K

$$(7) \qquad -m \leqq a \leqq m$$

ist. Wir wollen ein Element a aus K bei einer festen Anordnung von K *ganzzahlig-einschließbar* nennen, wenn es ein m gibt, so daß bei dieser Anordnung die Ungleichung (7) gilt, und *total ganzzahlig-einschließbar*, wenn es ein m gibt, so daß die Ungleichung (7) bei jeder Anordnung von K gilt. Die Elemente von $\mathfrak{C}^*(K)$ sind also total ganzzahlig-einschließbar.

Es sei nun umgekehrt zunächst x ein Element aus K, für das die Ungleichung

$$(8) \qquad -1 \leqq x \leqq 1 \qquad \text{bei jeder Anordnung von } K$$

gilt. Dann sind $1 - x$ und $1 + x$ totalpositiv. Es ist also auch das Ele-

ment $\frac{1-x}{1+x}$ für $x \neq -1$ totalpositiv und daher als Quadratsumme Σc_ν^2 mit c_ν aus K darstellbar. Aus (8) folgt also die Darstellung (4), x ist ein verallgemeinertes pythagoreisches Element (2).

Ist a ein beliebiges total ganzzahlig-einschließbares Element aus K, gibt es also zu a eine natürliche Zahl m, so daß

$$-m \leqq a \leqq m \quad \text{bei jeder Anordnung von } K \tag{9}$$

gilt, so gilt für $\frac{a}{m}$ die Ungleichung (8). Es gibt daher Elemente c_ν in K, so daß a in der Form

$$a = m\frac{1-\Sigma c_\nu^2}{1+\Sigma c_\nu^2} \quad \text{mit } c_\nu \text{ aus } K \text{ oder } a = -m \tag{10}$$

darstellbar ist. a ist also ein Element des Moduls $\mathfrak{S}^*(K)$. Es gilt also:

In einem reellen Körper ist der von den Elementen (1) *oder, was dasselbe ist, der von den verallgemeinerten pythagoreischen Elementen* (2) *erzeugte Modul der Ring der total ganzzahlig-einschließbaren Elemente des Körpers.*

Aus dem Beweis geht hervor, daß auch die Bedingung (8) die verallgemeinerten pythagoreischen Elemente charakterisiert und daß jedes total ganzzahlig-einschließbare Element aus K natürliches Vielfaches eines verallgemeinerten pythagoreischen Elementes ist.

Die Erzeugenden (1) lassen sich als die x aus K charakterisieren, für die

$$0 < x \leqq 1 \quad \text{bei jeder Anordnung von } K \tag{11}$$

ist. Es ist klar, daß jedes Element (1) dieser Bedingung genügt. Und wenn umgekehrt x ein Element ist, welches der Bedingung (11) genügt, so sind x und $1-x$, also auch $\frac{1-x}{x}$ totalpositiv, und $\frac{1-x}{x} = \sum c_\nu^2$ mit c_ν aus K darstellbar. Dann ist aber x von der Form (1).

§ 2.

Existenz von metrisch-euklidischen Geometrien mit Winkelhalbierbarkeit.

Wir fragen nun wieder in einer euklidischen Geometrie nach zugehörigen metrisch-euklidischen Teilgeometrien. Und zwar nehmen wir zu den Axiomen der metrisch-euklidischen Geometrie statt des in der ersten Mitteilung zugrunde gelegten Axioms 8 von der Halbierbarkeit des rechten Winkels das Axiom hinzu, daß *jeder Winkel halbierbar* sei:

8*. Wenn zwei verschiedene Geraden h_1 und h_2 sich in einem Punkte P schneiden, gibt es eine Gerade h, für die die Spiegelungsgleichung $h_1 h = h h_2$ gilt.

Wenn dies Axiom in einer euklidischen Geometrie gilt, gilt es auch in einer zu ihr gehörigen metrisch-euklidischen Teilgeometrie, und umgekehrt.

Während durch das Axiom 8 jeder Koordinatenkörper zugelassen war, dessen Charakteristik $\neq 2$ und in dem -1 nicht Quadrat ist, hat das Axiom 8* für den Koordinatenkörper zur Folge, daß in ihm außerdem die Operation

$$\sqrt{1+u^2} \tag{12}$$

stets ausführbar ist. Denn wie aus den in der ersten Mitteilung angegebenen Spiegelungsformeln folgt, geht die x-Achse bei der Spiegelung an der Geraden $y = cx$ in die Gerade $y = \frac{2c}{1-c^2}x$ über. Wenn nun jeder Winkel halbierbar ist, der den Nullpunkt zum Scheitel hat, muß zu jeder Geraden $y = ux$ eine Gerade $y = cx$ mit der Eigenschaft existieren, daß die Spiegelung an ihr die x-Achse in $y = ux$ überführt; d. h. aber, daß die Gleichung

$$\frac{2c}{1-c^2} = u \tag{13}$$

für jedes u aus K lösbar sein muß, und dazu ist notwendig, daß (12) für jedes u aus K existiert. Umgekehrt hat die Ausführbarkeit der Operation (12) für jedes u aus K zur Folge, daß in der euklidischen Geometrie über K jeder Winkel halbierbar ist. Einen Körper, in dem -1 nicht Quadrat und in dem die Operation (12) für jedes u ausführbar ist, nennen wir einen *Hilbertschen Körper*. Ein Hilbertscher Körper hat die Eigenschaft, daß in ihm jede Quadratsumme als Quadrat darstellbar ist, und ist ein reeller Körper.

Nach dem algebraischen Kriterium der ersten Mitteilung sind die Koordinatenmengen, die in der euklidischen Geometrie über einem Körper K die zugehörigen, $O \equiv (0,0)$ und $E \equiv (1,0)$ enthaltenden metrisch-euklidischen Teilgeometrien definieren, die in K gelegenen Moduln, die die Elemente

$$\frac{1}{1+c^2} \qquad \text{mit } c \text{ aus } K \tag{14}$$

als Multiplikatoren enthalten, und die Koordinatenmenge, die die kleinste zugehörige, O und E enthaltende metrisch-euklidische Teilgeometrie definiert, ist jeweils der von den Elementen (14) erzeugte Ring $\mathfrak{C}(K)$.

In einem Hilbertschen Körper lassen sich nun die in § 1 betrachteten Erzeugenden (1) sämtlich in der Form (14) und die verallgemeinerten pythagoreischen Elemente (2) als pythagoreische Elemente

$$\frac{1-c^2}{1+c^2} \quad \text{mit } c \text{ aus } K, -1 \tag{15}$$

darstellen. In einem Hilbertschen Körper gelten daher für die Elemente (14) und die pythagoreischen Elemente (15) die verschiedenen Einzelaussagen, die in § 1 für die allgemeineren Elemente (1) und (2) bewiesen worden sind. Über das Verhältnis der beiden läßt sich in einem Hilbertschen Körper noch genauer sagen: die Elemente (14) sind die Qua-

drate der von Null verschiedenen pythagoreischen Elemente; das folgt daraus, daß in einem HILBERTschen Körper K die von Null verschiedenen pythagoreischen Elemente (15) die in der Form

$$\pm \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \qquad \text{mit } u \text{ aus } K \tag{16}$$

darstellbaren Elemente sind, wobei c und u durch die Gleichung (13) miteinander zusammenhängen.

In einem HILBERTschen Körper ist also der Ring $\mathfrak{C}(K)$ mit dem Ring $\mathfrak{C}^*(K)$ identisch, und der in § 1 bewiesene Satz gibt ein Kriterium für den Ring $\mathfrak{C}(K)$.

Wenden wir dies Kriterium zunächst auf den kleinsten HILBERTschen Körper, den Körper Ω derjenigen algebraischen Zahlen an, die man gewinnen kann, indem man von 1 ausgehend (eine endliche Anzahl von Malen) die rationalen Operationen und die Operation (12) anwendet. Jedes Element w aus Ω gehört einem gewissen Teilkörper K_n von Ω an, zu dem es eine Kette von Körpern $K_0, K_1, \ldots, K_n$ mit der Eigenschaft gibt, daß K_0 der Körper der rationalen Zahlen ist und jeweils K_{i+1} aus K_i durch Adjunktion eines Ausdrucks $\sqrt{1+u_i^2}$ mit u_i aus K_i entsteht. Wir zeigen durch vollständige Induktion, daß in jedem Körper der Kette alle Elemente total ganzzahlig-einschließbar sind. Diese Behauptung, die jedenfalls für K_0 zutrifft, sei für K_i richtig ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$). Ist dann

$$a_i + b_i\sqrt{1+u_i^2} \qquad \text{mit } a_i, b_i, u_i \text{ aus } K_i \tag{17}$$

ein beliebiges Element aus K_{i+1}, so sind nach Induktionsvoraussetzung a_i und $b_i^2(1+u_i^2)$ total ganzzahlig-einschließbar in K_i, und also auch in dem umfassenden Körper K_{i+1}. Da in K_{i+1} mit $b_i^2(1+u_i^2)$ auch $b_i\sqrt{1+u_i^2}$ total ganzzahlig-einschließbar ist, ist (17) in K_{i+1} total ganzzahlig-einschließbar. Hieraus schließen wir, daß w in K_n und also auch in Ω total ganzzahlig-einschließbar ist. Es gilt daher:

Der Ring $\mathfrak{C}(\Omega)$ ist gleich dem Körper Ω; zu der euklidischen Geometrie über dem kleinsten HILBERTschen Körper Ω gehört keine echte metrisch-euklidische Teilgeometrie.

Als zweiten HILBERTschen Körper betrachten wir den Körper $\Omega(t)$ derjenigen algebraischen Funktionen, die man von einem Parameter t ausgehend durch die rationalen Operationen und die Operation (12) gewinnt. HILBERT hat für diesen Körper eine spezielle nichtarchimedische Anordnung angegeben; er betrachtet t als eine reelle Veränderliche und nennt eine Funktion aus $\Omega(t)$ (mit bestimmten Wurzelvorzeichen) positiv, wenn es für sie ein t_0 gibt, so daß ihre Funktionswerte für alle $t > t_0$ positiv sind. DEHN hat als Koordinatenmenge seiner semieuklidischen Geometrie die Elemente aus $\Omega(t)$ genommen, die bei dieser Anordnung ganzzahlig-einschließbar sind.

Es ist klar, daß unser Ring $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ eine echte Teilmenge der Dehnschen Koordinatenmenge ist. Denn die Elemente von $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ sind ja nicht nur bei der Hilbertschen Anordnung ganzzahlig-einschließbar, sondern total ganzzahlig-einschließbar; daher gehört z. B. die Funktion $\frac{1}{t}$, die zu der Dehnschen Koordinatenmenge gehört, nicht zu unserem Ring. Man kann auch so schließen: Die Erzeugenden des Rings $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ und daher alle Funktionen aus $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ sind, als Funktionen des reellen Arguments t betrachtet, beschränkt (für alle t), während eine Funktion der Dehnschen Koordinatenmenge nur der Bedingung genügt, daß es ein t_0 gibt, so daß sie beschränkt für alle $t > t_0$ ist.

Die Funktionen, die dem Ring $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ angehören, sind nicht nur selbst als Funktionen des reellen Parameters t beschränkt, sondern haben auch die Eigenschaft, daß ihre sämtlichen Konjugierten beschränkte Funktionen sind. Diese Eigenschaft läßt sich zur Charakterisierung der zu $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ gehörigen Funktionen verwenden. Denn wie wir jetzt zeigen wollen, gilt auch die Umkehrung: Jede samt ihren Konjugierten für alle reellen Werte von t beschränkte Funktion aus $\Omega(t)$ gehört dem Ring $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ an.

Wir verwenden den folgenden Satz von Artin[8]: $\mathbf{P}(t)$ sei der Körper der rationalen Funktionen von t mit rationalen Koeffizienten. und eine Funktion aus $\mathbf{P}(t)$ heiße definit, wenn sie für keinen reellen Wert von t einen negativen Funktionswert hat; dann gilt: Jede definite Funktion aus $\mathbf{P}(t)$ ist in $\mathbf{P}(t)$ totalpositiv.

Hieraus folgt: Jede beschränkte Funktion aus $\mathbf{P}(t)$ ist in $\mathbf{P}(t)$ total ganzzahlig-einschließbar. Ist nämlich $f(t)$ eine beschränkte Funktion aus $\mathbf{P}(t)$, d. h. gibt es eine natürliche Zahl m, so daß

$$-m \leqq f(t) \leqq m \quad \text{für alle reellen Werte von } t \tag{18}$$

ist, so sind die Funktionen $m - f(t)$ und $m + f(t)$ definit, also nach dem Artinschen Satz bei keiner Anordnung $<_{\mathbf{P}(t)}$ des Körpers $\mathbf{P}(t)$ negativ, und daher gilt

$$-m \leqq_{\mathbf{P}(t)} f(t) \leqq_{\mathbf{P}(t)} m \tag{19}$$

für jede Anordnung $<_{\mathbf{P}(t)}$ von $\mathbf{P}(t)$.

Dieser Schluß läßt sich nun durch Induktion fortsetzen: Jede samt ihren Konjugierten beschränkte Funktion aus $\Omega(t)$ ist in $\Omega(t)$ total ganzzahlig-einschließbar.

Es sei $f(t)$ eine samt ihren Konjugierten beschränkte Funktion aus $\Omega(t)$. $f(t)$ gehört einem gewissen Teilkörper $K_n(t)$ von $\Omega(t)$ an, zu dem es eine Kette von Körpern $K_0(t), K_1(t), \ldots, K_n(t)$ mit der Eigenschaft gibt, daß $K_0(t)$ der Körper $\mathbf{P}(t)$ ist und jeweils $K_{i+1}(t)$ aus $K_i(t)$ durch

[8]) Artin a. a. O. Satz 3, insb. S. 109.

echte Adjunktion eines Ausdrucks $\sqrt{1+u_i^2(t)}$ mit $u_i(t)$ aus $K_i(t)$ entsteht. Wir wollen nun durch vollständige Induktion beweisen, daß in jedem Körper der Kette die samt ihren Konjugierten beschränkten Funktionen total ganzzahlig-einschließbar sind. Diese Behauptung ist, wie wir gesehen haben, für $K_0(t)$ richtig. Wir machen die Induktionsannahme, sie sei für $K_i(t)$ richtig. Ist dann

$$a_i(t)+b_i(t)\sqrt{1+u_i^2(t)} \qquad \text{mit } a_i(t),\ b_i(t),\ u_i(t) \text{ aus } K_i(t) \tag{20}$$

eine Funktion aus $K_{i+1}(t)$, die samt allen ihren Konjugierten beschränkt ist, so sind auch

$$a_i(t)-b_i(t)\sqrt{1+u_i^2(t)} \tag{21}$$

und daher

$$a_i(t),\ b_i^2(t)\,(1+u_i^2(t)) \tag{22}$$

mit ihren Konjugierten beschränkte Funktionen. Die Funktionen (22) gehören dem Körper $K_i(t)$ an und sind nach Induktionsvoraussetzung in $K^i(t)$, folglich auch in dem umfassenden Körper $K_{i+1}(t)$ total ganzzahlig-einschließbar. Da in $K_{i+1}(t)$ mit $b_i^2(t)\,(1+u_i^2(t))$ auch $b_i(t)\sqrt{1+u_i^2(t)}$ total ganzzahlig-einschließbar ist, ist (20) in $K_{i+1}(t)$ total ganzzahlig-einschließbar. Wir schließen wieder, daß $f(t)$ in $K_n(t)$ und daher auch in $\Omega(t)$ total ganzzahlig-einschließbar ist.

Da also die samt ihren Konjugierten beschränkten Funktionen aus $\Omega(t)$ total ganzzahlig-einschließbar sind, gehören sie nach § 1 zu $\mathfrak{C}(\Omega(t))$, und es ergibt sich:

Der Ring $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ besteht aus allen Elementen des Hilbertschen *Körpers $\Omega(t)$, die als Funktionen des reellen Parameters t samt ihren Konjugierten beschränkt sind.*

Die Geometrie, die den Ring $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ als Koordinatenbereich hat, ist eine echte Teilgeometrie der Dehnschen semieuklidischen Geometrie, die wie diese zu der euklidischen Geometrie über dem Körper $\Omega(t)$ gehört und die Punkte O und E enthält.

In der Geometrie über dem Ring $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ gelten bei jeder Zwischenbeziehung, die durch eine Anordnung des Körpers $\Omega(t)$ induziert wird, die linearen Anordnungsaxiome. Dagegen gilt bei keiner dieser Anordnungen das Axiom von Pasch[9]). Denn zwischen den zur Geometrie gehörigen Punkten E und $E'' \equiv (-1, 0)$ liegt beispielsweise immer einer der beiden nicht zur Geometrie gehörigen Punkte $T \equiv (t, 0)$ und $T^* \equiv \left(\frac{1}{t},\ 0\right)$. Verbindet man daher bei einer bestimmten Anordnung den zur Geometrie gehörigen Punkt $M \equiv (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ mit dem zwischen E und E'' gelegenen Punkt T bzw. T^* durch eine Gerade g, so ist $E, E' \equiv (0, 1)$, E'' ein zur Geometrie gehöriges Dreieck, von dem die zur Geometrie gehörige Gerade g nur eine Seite in einem inneren Punkt trifft.

[9]) Hilbert a. a. O. Axiom II 4.

Die Geometrie ist daher von Interesse für die Frage, welche metrischen Voraussetzungen die Anordenbarkeit zur Folge haben. Die in der metrisch-euklidischen Geometrie über $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ geltenden metrischen Existenzsätze würden unter Voraussetzung des Parallelenaxioms die volle Anordenbarkeit zur Folge haben: eine euklidische Geometrie mit Winkelhalbierbarkeit läßt sich stets so anordnen, daß alle Anordnungsaxiome gelten.

Es möge noch eine weitere axiomatische Bemerkung angefügt werden. Für die Konstruktion einer voll geordneten metrisch-euklidischen Geometrie etwa im Sinne des Hilbertschen Axiomensystems, in der das Parallelenaxiom nicht gilt, muß man wie Dehn notwendig eine nichtarchimedische Anordnung verwenden; denn nach einem bekannten, auf Lambert zurückführbaren Schluß würde aus euklidischer Metrik und archimedischem Axiom die Gültigkeit des Parallelenaxioms folgen[10]). Für die Anordnung der Geometrie über dem Ring $\mathfrak{C}(\Omega(t))$ können wir, da ohnehin keine der Anordnungen des Körpers eine volle Anordnung für sie induziert, aber auch eine archimedische Anordnung des Körpers $\Omega(t)$ verwenden. Die Geometrie kann daher als Teilgeometrie der gewöhnlichen euklidischen Geometrie über dem Körper der reellen Zahlen betrachtet werden, und man sieht, daß man ohne das Axiom von Pasch aus euklidischer Metrik und archimedischem Axiom das Parallelenaxiom nicht folgern kann.

§ 3.

Konstruierbarkeit mit Lineal, Rechtwinkelmaß und Eichmaß.

Aus unseren Sätzen über metrisch-euklidische Teilgeometrien können wir Folgerungen für Konstruierbarkeitsfragen herleiten. Wir denken uns eine metrisch-euklidische Geometrie mit Winkelhalbierbarkeit und in ihr zwei Punkte gegeben, die wir als Endpunkte einer festen Einheitsstrecke wählen, nehmen zu den drei Grundkonstruktionen der ersten Mitteilung und zu den durch sie definierten Instrumenten Lineal und Rechtwinkelmaß als vierte *Grundkonstruktion* die folgende hinzu:

Auf einer gegebenen Geraden g zu einem gegebenen, auf g gelegenen Punkt A einen Punkt B zu konstruieren, so daß die Strecke AB der Einheitsstrecke kongruent ist[11]).

---

[10]) F. Schur, Grundlagen der Geometrie. Leipzig-Berlin 1909, S. 178. Vgl. Hilbert a. a. O. S. 50.

[11]) Eine Strecke UV heiße einer Strecke $U'V'$ kongruent, wenn es eine Gerade h durch U gibt, so daß die Spiegelung an h den Punkt V in den durch die Spiegelungsgleichung $U'V' = UV^*$ definierten Punkt V^* überführt. Zur Definition der Kongruenz aus einer Orthogonalitätsrelation vgl. auch R. Baer, The fundamental theorems of elementary geometry. An axiomatic analysis. Transactions Am. Math. Soc. 56, S. 94—129, 1944.

und definieren das *Eichmaß* als ein Instrument, welches gestattet, diese Grundkonstruktion auszuführen. Es sei nochmals hervorgehoben, daß wir das Lineal nur als ein Instrument zum Ziehen der Verbindungsgeraden zweier gegebener Punkte zulassen.

Formulieren wir das Axiom 8* als Konstruktionsaufgabe, so kann man sie mit Hilfe unserer Instrumente ausführen, indem man von P aus auf h_1 und h_2 die Einheitsstrecke abträgt und durch P die Senkrechte zur Verbindungsgeraden der freien Endpunkte zieht[12]). Da man ferner mit Hilfe der Grundkonstruktionen ein Quadrat konstruieren kann, welches die beiden gegebenen Punkte als Eckpunkte besitzt, können wir auf Grund des in der ersten Mitteilung Bewiesenen den Satz aussprechen:

In einer metrisch-euklidischen Geometrie mit Winkelhalbierbarkeit lassen sich die Konstruktionsaufgaben, die den vorausgesetzten Existenzaxiomen entsprechen, in dem angegebenen Sinne mit Lineal, Rechtwinkelmaß und Eichmaß lösen, wenn wenigstens zwei Punkte gegeben sind.

Die Ergebnisse des § 2 gestatten uns nun, Sätze über die Reichweite unserer Konstruktionsmittel zu beweisen. Wir fragen zunächst, welche Punkte und Geraden man in einer gegebenen euklidischen Geometrie mit Winkelhalbierbarkeit mit Hilfe von Lineal, Rechtwinkelmaß und Eichmaß konstruieren kann, wenn man von zwei festen Punkten O und E ausgeht. Bezeichnen wir die Gesamtheit dieser Punkte und Geraden mit $\mathfrak{K}$ und wählen wir O und E als Null- und Einheitspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ist klar, daß die Koordinaten der Punkte und Geraden aus $\mathfrak{K}$ (letztere bei geeigneter Normierung) Elemente des Körpers Ω sein müssen, der jedenfalls in dem Koordinatenkörper der gegebenen euklidischen Geometrie enthalten ist. Aus dem vorangehenden Satz folgt, daß $\mathfrak{K}$ selbst eine metrisch-euklidische Geometrie mit Winkelhalbierbarkeit ist, die also eine Teilgeometrie der euklidischen Geometrie über Ω ist. Fragen wir nun nach der euklidischen Geometrie, zu der $\mathfrak{K}$ gehört, so muß ihr Koordinatenkörper in Ω enthalten und ein Hilbertscher Körper, also Ω selbst sein. $\mathfrak{K}$ ist also eine O und E enthaltende zugehörige metrisch-euklidische Teilgeometrie der euklidischen Geometrie über Ω und daher nach § 2 mit dieser euklidischen Geometrie identisch. Es gilt daher:

In einer euklidischen Geometrie mit Winkelhalbierbarkeit kann man, von zwei festen Punkten O und E ausgehend, auch bei dem eingeschränkten Gebrauch des Lineals mit Lineal, Rechtwinkelmaß und Eichmaß alle Punkte konstruieren, deren Koordinaten bei Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit O als Null- und E als Einheitspunkt dem Körper Ω angehören.

---

[12]) Man könnte auch diese Aufgabe als vierte Grundkonstruktion und den Winkelhalbierer statt des Eichmaßes als Konstruktionsinstrument verwenden. Dies wäre vom Standpunkt unseres Axiomensystems das Natürlichere.

Der in § 2 gekennzeichnete Funktionenbereich spielt eine Rolle für die Frage, welche Konstruktionen mit unseren Hilfsmitteln allgemein ausführbar sind. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung von Konstruktionen, die von nur einem Parameter t abhängen, denken uns außer den Punkten O und E einen Punkt $T \equiv (0, t)$ gegeben und fragen, welche Punkte und Geraden mit Lineal, Rechtwinkelmaß und Eichmaß von O, E, T aus *allgemein*, d. h. unabhängig vom Wert des Parameters konstruiert werden können. Die Koordinaten der allgemein konstruierbaren Punkte und Geraden werden nun Funktionen von t sein, und diese Funktionen werden dem Körper $\Omega(t)$ angehören. Unsere Frage soll daher so präzisiert werden: Welches sind in der euklidischen Geometrie über dem Körper $\Omega(t)$ die Punkte und Geraden, die man von O, E, T aus mit Lineal, Rechtwinkelmaß und Eichmaß konstruieren kann? Die Gesamtheit $\mathfrak{R}(t)$ dieser Punkte und Geraden ist eine metrisch-euklidische Teilgeometrie mit Winkelhalbierbarkeit in der Geometrie über $\Omega(t)$. Fragen wir wieder nach der euklidischen Geometrie, zu der $\mathfrak{R}(t)$ gehört, so muß ihr Koordinatenkörper ein Hilbertscher Teilkörper von $\Omega(t)$, der t enthält, also $\Omega(t)$ selbst sein. $\mathfrak{R}(t)$ ist also eine O, E, T enthaltende zugehörige metrisch-euklidische Teilgeometrie der euklidischen Geometrie über $\Omega(t)$. Der Koordinatenbereich von $\mathfrak{R}(t)$ enthält daher mindestens die Funktionen

$$f(t) + g(t)\,t \quad \text{mit } f(t),\ g(t) \text{ aus } \mathfrak{C}(\Omega(t)). \tag{23}$$

Andererseits enthält der Koordinatenbereich von $\mathfrak{R}(t)$ auch höchstens diese Funktionen, da sie in der euklidischen Geometrie über $\Omega(t)$ eine O, E, T enthaltende metrisch-euklidische Teilgeometrie mit Winkelhalbierbarkeit, also einen Bereich von Punkten und Geraden definieren, der gegen unsere Grundkonstruktionen abgeschlossen ist. Wir erhalten daher den Satz:

In einer euklidischen Geometrie mit Winkelhalbierbarkeit kann man, ausgehend vom Null- und Einheitspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und einem Punkt $T \equiv (0, t)$, wo t ein Parameter ist, die Konstruktion eines Punktes dann und nur dann mit Lineal, Rechtwinkelmaß und Eichmaß bei der angegebenen Verwendungsweise allgemein ausführen, wenn seine Koordinaten sich als Funktionen

$$f(t) + g(t)\,t \tag{24}$$

darstellen lassen, wo $f(t)$ und $g(t)$ Funktionen aus dem Körper $\Omega(t)$ sind, die samt ihren Konjugierten für alle reellen Werte von t beschränkt sind.

(Eingegangen am 3. April 1947.)

Berichtigungen.

1. Zu E. KAMKE, Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. III und IV.

Band **46** (1940), S. 277: Bei der Anwendung des Hilfssatzes von ZERMELO besteht eine Lücke, die ausgefüllt ist bei L. COLLATZ, Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig 1945, S. 161.

Band **48** (1942):

S. 77, Formel (32). Unter dem Summenzeichen lies ν statt μ.

S. 79, Formel (41). Das letzte Ungleichheitszeichen muß $\leqq$ lauten.

S. 80, Zeile 11. Lies 2.4 statt 2.3.

S. 84, Zeile 12 von unten. Die linke Seite der Gleichung muß $\Psi(w_h)$ lauten.

S. 84, Zeile 7 von unten. Man hat die s_h außerdem noch so zu wählen, daß

$$\frac{\Phi(u_h) - \lambda_1}{s_h} \to 0 \quad \text{für } h \to \infty \tag{55 a}$$

ist; wegen (52) und (51) sind die Forderungen erfüllbar.

S. 85, Zeile 1—3 ist zu ersetzen durch: Hieraus folgt weiter, da $s_h > 0$ ist,

$$\frac{\Phi(u_h) - \lambda_1}{s_h} + 2 r_h \Phi(u_h, v_h) + s_h |\Phi(v_h - \Psi(v_h)| \geqq 0,$$

und somit wegen (55 a), (52) und $s_h \to 0$:

S. 89, Zeile 11. Statt „zulässige Funktion $u(x)$ und“ lies: „$(m-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $u(x)$, die den wesentlichen Randbedingungen genügt, und“.

S. 90, Zeile 11. Lies: Es sei $w(x)$ eine beliebige m-mal stetig differenzierbare und $(m+1)$-mal stückweise stetig differenzierbare.

S. 92, Zeile 11 und 12. Die beiden letzten Lettern d und 1 sind zu vertauschen. — Zeile 15. Bei der eckigen Klammer fehlt oben b.

S. 94, Zeile 15. Lies G_0 statt F_0.

S. 95, Zeile 6. Lies $\psi_q^{(\nu)}$ statt $\psi_\mu^{(\nu)}$.

S. 97. Streiche die Fußnote. — Zeile 10 von unten: Ersetze „integrierbare“ durch „zulässige“. — Formel (84) ersetze durch $\Psi(w_\nu, y) = 0$.

S. 98. In Zeile 4 ersetze das Integral durch $\Psi(w_\nu, \psi_q)$.

S. 100, Zeile 12. Ersetze das Integral durch $\Psi(w_\nu, u_q)$. — Formel (98) ersetze durch

$$0 = \sum_{q=1}^{h} a_q \Psi(w_\nu, u_q) = \Psi(w_\nu, \bar{y}).$$

II. Zu G. G. Lorentz, Über die Dichte des Potentials einer räumlichen Belegung.

Band **51** (1949), S. 262—264: Ich habe nachträglich festgestellt, worauf mich auch Herr A. Zygmund freundlicherweise aufmerksam machte, daß das Ergebnis meiner Note schon früher von S. Saks, On operators of Blaschke and Privaloff for subharmonic functions, Réc. Math. n. s. **9** (1941), 451—456 erhalten worden ist.

III. Zu W. Schwan, Perspektivitäten in allgemeinen Verbänden.

Band **51**, (1948), 126—134: Auf S. 130 soll es in Formel (9 b) rechts

$$b \cup (a \cap (b \cup z)) \quad \text{statt} \quad b \cap (a \cap (b \cup z))$$

lauten.